UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

TAVOLE DI VERITÀ E SEMANTICA PER LA LOGICA INTUIZIONISTICA

RELATORE:
Prof. Franco Parlamento

STUDENTE:
Michele Mignani

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1 Introduzione

≪*Però, rimane ancora la seguente specifica questione: "Può uno, nel caso di costruzioni e trasformazioni puramente matematiche, trascurare temporaneamente il sistema eretto e muoversi assecondando il costrutto linguistico, guidato dai principi del sillogismo, della contraddizione e del terzo escluso, rimanendo sempre confidente che ogni parte del suo discorso potrà essere giustificata, richiamando la costruzione matematica suggerita dal ragionamento?"*≫. [1] Con queste parole, ne "L'inaffidabilità dei principi logici" ([Bro08]), L.E.J. Brouwer avverte la comunità del suo tempo, e non solo, della minaccia insita nell'approccio formalista alla matematica. Sebbene l'articolo anticipi di circa dieci anni le idee di uno dei massimi studiosi di linguaggio e di logica, L. Wittgenstein, in esso non è difficile rintracciare una sfiducia anche più radicale di quella del filosofo stesso, almeno nel suo primo periodo. Il matematico accusa la tradizione precedente di aver esteso le *"regolarità del linguaggio creato ad un linguaggio di parole matematiche che non accompagna [più] la [vera] matematica"* [2]; d'altro canto, nello stesso periodo, il filosofo prende atto che *"il linguaggio riveste il pensiero. Lo traveste in modo tale che dalla forma esteriore dell'abito non si può inferire la forma del pensiero rivestito; perché la forma esteriore dell'abito è formata a ben altri fini che al fine di far riconoscere la forma del corpo"*. [3] Nel corso del Tractatus logico-philosophicus, tuttavia, sembra non perdersi la fiducia nella formalizzazione sintattica matematica (*"Che la verità d'una proposizione segua dalla verità di altre proposizioni, lo si vede dalla struttura delle proposizioni"* [4]) e nella logica matematica (*"[...] Noi le potremmo conoscere solo se la causalità fosse una necessità interiore, come quella della conclusione logica"* [5]). Il problema che solleva Brouwer, invece, mette in ombra anche quello che per il primo Wittgenstein sembra essere uno dei punti saldi assunti. Infatti, *"in matematica non è certo se tutta la logica sia permessa e non è certo se si può decidere quale logica può essere permessa"* [6].

Ma allora cos'è per il matematico olandese quell'attività che per secoli e da molti filosofi è stata dipinta come il regno della necessità logica e del rigore? Brouwer propone una visione alternativa a quella classica, con una speculazione che non si limita ad essere teorica, ma che incide pesantemente anche nella prassi. Rifiutando qualsiasi visione platonistica della discipli-

[1] Traduzione libera da [Bro08].
[2] Ibidem (traduzione libera).
[3] [Wit21], prop. 4.002.
[4] Ibidem, prop. 5.13.
[5] Ibidem, prop. 5.1362.
[6] Traduzione libera da [Bro08].

na, abbracciata dai più, Brouwer afferma che la matematica è una libera creazione della mente umana, una ricerca di fatti la cui verità è appresa dal soggetto *immediatamente*, ovvero senza la mediazione né del linguaggio (strumento che è utile solo per comunicare e per ricordare i risultati scoperti), né della logica (intesa come manipolazione di simboli sintattici). Gli oggetti di cui la matematica parla non esistono al di fuori di noi, come neanche il concetto di verità e falsità. Non ha senso pensare alla verità di una proposizione indipendentemente dalla conoscenza che noi possediamo a riguardo: non si può quindi, preso un enunciato che ancora non è stato né dimostrato, né confutato, assumere che esso sia dimostrabile o refutabile, vero o falso. Con le parole di Brouwer "*[...] la verità è soltanto nella realtà, ovvero nelle esperienze presenti e passate della coscienza, [pertanto] non ci sono verità non-esperite e la logica non è uno strumento assolutamente affidabile per scoprire verità.*" [7] Qui già si può vedere come la critica non rimane astratta, ma si cala nella prassi, imponendo un rifiuto, almeno parziale, del principio del terzo escluso, legge logica considerata fondamentale per millenni: non possiamo asserire la conoscenza di $A \vee \neg A$ a priori, senza aver sperimentato A o $\neg A$.

Brouwer stesso provò a mettere in pratica i precetti evidenziati sopra, sviluppando un nuovo approccio alla matematica che passa sotto il nome di "intuizionismo". È sbagliato pensare, però, che l'unico cambiamento attuato sia l'eliminazione del principio del terzo escluso. Infatti, come si può capire dalle righe precedenti, l'intuizionismo non consiste in una nuova logica, ma in una nuova matematica: troviamo risultati estremamente in disaccordo con la matematica classica. Esempio cardine è l'enunciato secondo cui "tutte le funzioni da $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ sono uniformemente continue", considerato falso classicamente ma vero intuizionisticamente.

La prospettiva sovversiva di Brouwer storicamente non ha avuto la meglio, soffocata dal successo del formalismo da un lato e dalle critiche degli anti-psicologisti dall'altro. D. Hilbert, protagonista indiscusso della corrente del formalismo, vedeva nella proposta di Brouwer una minaccia enorme al suo programma: il motto "*wir müssen wissen, wir werden wissen*" è in aperto contrasto con la visione disincantata del matematico olandese circa la logica e il linguaggio. Non fu però solo Hilbert ad opporsi alle idee di Brouwer: l'approccio psicologista paventato dall'intuizionismo ha avuto nel corso della storia molti detrattori, tra cui G. Frege e il secondo E. Husserl. Per "psicologismo", in questo frangente, intendiamo la tendenza filosofica del ridurre principi logici e matematici alla struttura mentale-psicologica dell'essere umano. Sono essenzialmente due i motivi per cui alcuni ascrivono Brouwer

[7] Cfr. [Bro48].

a questa scuola di pensiero. In primis, in una prospettiva neo-kantiana, egli considera la struttura della psiche umana, dotata della forma trascendentale del tempo,[8] alla base del sentimento della "two-oneness", cioè quello relativo al riconoscere due entità distinte come un'unità, esperienza che permette all'uomo di raggruppare individui e, in ultima analisi, di costruire i numeri. Infine, è necessario parlare del concetto del "soggetto creativo": esso è concepito come una mente idealizzata in cui avviene la matematica già avulsa da ogni aspetto e limite umano. Questo costituisce per alcuni l'espressione più radicale dello psicologismo nelle idee di Brouwer; per altri, invece, come vedremo nel paragrafo successivo, rappresenta il motivo per cui l'intuizionismo non può essere considerato afferente a questa linea di pensiero.

Il problema principale dello psicologismo che spaventa la maggioranza dei filosofi delle scienze è l'incapacità di giustificare l'elevato grado di certezza che accompagna i risultati matematici. Se, infatti, riguardassero una prospettiva prettamente personale, o anche umana, come è possibile che la matematica possa essere usata per studiare fenomeni fisici, fenomeni che risiedono in una dimensione altra dalla psiche umana? Inoltre, come è possibile che gli uomini si capiscano tra di loro? Visto che le esperienze presenti e passate degli uomini sono diverse, lo sarà anche quella relativa alla "two-oneness" e dunque cosa garantisce che i numeri creati da due persone distinte siano soggette alle stesse leggi? Come abbiamo detto in precedenza, la risposta a queste domande risiede, per alcuni, nel "soggetto creativo": l'unicità di un tale ente eliminerebbe ogni problema di incomunicabilità, mentre l'essere svincolato da ogni denotazione umana permetterebbe ai risultati matematici scoperti di trovare un'applicazione fuori dall'ambito psichico. Una discussione più approfondita sul tema si trova in [Att04].

Nonostante le numerose critiche, di cui abbiamo in parte discusso, Brouwer è stato indubbiamente una pietra miliare della logica matematica e, ovviamente, molte sono le riflessioni che i suoi scritti stimolano e altrettanti sono stati i tentativi di capire la profondità di un'opinione come la sua.

A riguardo, ci sembra doveroso sottolineare l'influenza che Brouwer ha avuto nel già citato E. Husserl, tanto che ci sono alcune letture dei lavori dei due, ad esempio quella in [Att04], orientate verso una riscoperta dell'intuizionismo in veste fenomenologica e un accostamento del "soggetto creativo" all'ente fenomenologico trascendentale descritto nei lavori del filosofo. Ci-

[8]Mentre Kant riconosce esserci due forme estetiche trascendentali (ovvero connaturate con l'apparato percettivo dell'uomo e che quindi informano tutte le esperienze fenomeniche del soggetto), Brouwer sostiene che ci sia solo il tempo, declassando il concetto di spazio. L'argomentazione del matematico a riguardo risiede nell'avvento delle geometrie euclidee che, a suo parere, rende insostenibile il ruolo privilegiato nel percepire umano attribuito da Kant allo spazio. Cfr. [Bro13].

tiamo anche, tra gli esempi illustri, M. Dummett che in [Dum73] cerca di individuare le basi filosofiche dell'intuizionismo. Uno dei punti più interessanti che si possono trovare nel testo riguarda il giustificare un tale approccio alla matematica, alla luce di una teoria del significato diversa da quella classica e che in alcuni contesti potrebbe essere più adeguata. L'autore sostiene che, mentre il concetto cardine in una prospettiva platonica è quello di verità, una nozione immutabile col tempo che esiste indipendentemente dall'esistenza di un ente che la pensa, nell'intuizionismo la parola chiave è quella di "uso". Conoscere il significato di un enunciato vuol dire riconoscere valido o meno un suo utilizzo in una applicazione o dimostrazione e "riconoscere una sua prova quando ce ne viene presentata una". [9] Questo è coerente con la prospettiva di Brouwer che concepisce la conoscenza di una proposizione come un percorso logico che porta alla consapevolezza del contenuto in esame e, rimanendo fedeli ad una tale concezione, nelle teorie assiomatizzate (come la maggior parte di quelle che un matematico incontra nella sua attività), il concetto di "prova" diventa centrale. Un tale pensiero è estremamente ragionevole guardando la formulazione di Brouwer del principio del terzo escluso, legata non alla verità degli enunciati, ma alla loro provabilità: "*ogni assegnamento τ di una proprietà ad un ente matematico può essere* giudicato*, cioè o provato o ridotto all'assurdo*".[10] Inoltre, storicamente, la nozione di "dimostrazione" è stata alla base dell'interpretazione BHK[11], il primo tentativo di creare una semantica per la logica intuizionistica. La formulazione che riteniamo più adeguata è la seguente:

- provare $F \wedge G$ significa provare sia F che G;
- provare $F \vee G$ significa provare F o G;
- provare $F \rightarrow G$ significa avere un modo per convertire ogni prova ipotetica di F in una di G;
- provare $\neg F$ significa avere un modo per convertire ogni prova ipotetica di F in una di $\perp$
- provare $\exists x F(x)$ significa esibire un d, provare la sua appartenenza in D (D è un qualsiasi insieme di elementi in cui consideriamo variare x) e provare $F(d)$;

[9] Cfr. [Dum73].
[10] Cfr. [Bro48].
[11] Si tratta di un acronimo che rende onore al padre dell'intuizionismo Brouwer, al suo allievo A. Heyting e a A. Kolmogorov che diede importanti contributi anche su questo tema.

- provare $\forall x F(x)$ significa avere un modo per convertire ogni prova ipotetica di $d \in D$ in una prova di $F(d)$;
- non c'è una prova di $\perp$.

È facile osservare che, seppur presentata informalmente (non è chiaro cosa significa "avere un modo per convertire una prova" o "per convertire una ipotetica prova"), in base a questa interpretazione e in particolare al secondo punto, il principio del terzo escluso non può essere riconosciuto valido: non si può escludere a priori l'esistenza di una formula F per cui non si possa né provare F, né modificare ogni ipotetica prova di F in una di $\perp$.

Può essere già compreso uno dei motivi per cui potrebbe risultare utile studiare l'intuizionismo e la logica intuizionistica. Un tale approccio, infatti, potrebbe essere utile in tutti gli ambiti in cui si vuole prestare attenzione alle dimostrazioni o al carattere costruttivo dei teoremi in esame. Infatti, la logica intuizionistica, ovvero il sistema che si ottiene privando la logica classica del principio del terzo escluso, presenta delle notevoli caratteristiche metamatematiche: la proprietà della disgiunzione e quella dell'esistenziale. La prima ci informa che, qualora riuscissimo a dedurre intuizionisticamente $F \vee G$, allora potremo dedurre anche F o G; la seconda, invece, afferma che, qualora riuscissimo a dimostrare intuizionisticamente che esiste un ente con una determinata proprietà, allora potremo anche trovare tale ente o, in altre parole, una deduzione intuizionistica di $\exists x F(x)$ comporta una deduzione anche di $F(t)$ per qualche termine t del linguaggio in cui lavoriamo. Per dimostrare questi risultati si consiglia l'approccio sintattico-deduttivo originario di G. Gentzen ([Gen35]).

Un altro motivo estremamente valido per studiare la logica intuizionistica è basato sulla critica del principio del terzo escluso attuata da Quine in [Qui81]. Egli, sebbene si muova in difesa dell'approccio classico, ne evidenzia i problemi che questo potrebbe trovarsi ad affrontare. L'autore sostiene che il principio del terzo escluso e in generale la logica classica, ha avuto e ha un ruolo centrale nelle scienze e in matematica in quanto risulta il "*tratto essenziale di ogni nostra teoria scientifica*". Tuttavia, l'avvento della fisica quantistica e in futuro lo sviluppo di altre discipline, potranno costituire una grave minaccia ad un tale principio logico, che, per quanto elegante, risulta una semplificazione nello studio delle esperienze che ogni giorno incontriamo. Illuminante l'osservazione compiuta a riguardo dell'antico "paradosso del mucchio". Esso recita che "se la rimozione di un singolo granello di sabbia da un mucchio lascia sempre un mucchio, allora, per induzione matematica, la rimozione di tutti i granelli comporta ancora l'avere un mucchio." Molti potrebbero non vedere alcun problema in una frase del genere ed obiettare che se definissimo nella maniera corretta il termine "mucchio", allora ogni contraddizione sparirebbe: ad ogni istante si potrebbe considerare vera o falsa qualsiasi asserzione a riguardo, e ad esempio stabilire se "X privato di un granello è ancora un mucchio" oppure no. In questo modo si salverebbe la validità del principio del terzo escluso istanziato con qualsiasi formula relativa al "mucchio" in questione. Quine nota però che non sempre si può definire un termine e che, anzi, è proprio nella vaghezza della semantica a cui una parola afferisce che risiede la capacità per un uomo di capirne il significato e di usarla. Anche nelle scienze si può incorrere in problemi di questo tipo, legati all'incapacità di trovare determinazioni condivisibili e chiare: supponendo di avere un tavolo e di togliere un atomo alla volta, quanti sono gli atomi che un tavolo deve avere e quando smette di essere tale? Ha senso contare gli atomi di un oggetto? Quine osserva che la necessità di rigore e di precisione nella matematica, sebbene possa risolvere i problemi che il principio di bivalenza si trova ad affrontare, rischia di essere una richiesta troppo grande e di rendere la logica e la matematica troppo distanti da un loro possibile utilizzo nelle scienze. Egli scrive: "*Siamo capaci di stipulare un arbitrario numero minimo di granelli in un mucchio [...] ma non riusciamo a convenire sulla demarcazione del numero di molecole della superficie di un tavolo. Ci mancano le parole*". Concludiamo notando la vicinanza tra questa frase e la critica, già riportata, di Brouwer a chi estende "*la regolarità del linguaggio creato ad un linguaggio di parole matematiche che non accompagna [più] la [vera] matematica.*"

Notazioni

Lavoreremo con un linguaggio che contiene un infinità numerabile di variabili $(x, y, x_1, \dots, x_n)$, eventualmente delle costanti $(c, d, c_1, \dots)$ ed un insieme numerabile di atomi proposizionali $(A, B, A_1, A_2, \dots)$; indicheremo le formule con lettere latine maiuscole $(G, F, H, G_1, \dots)$. Il sistema deduttivo di riferimento sarà la deduzione naturale (**N** e **NC**); tuttavia, in alcune dimostrazioni (ad esempio nel Teorema 2.2) sarà utile ricorrere al calcolo dei sequenti $\mathbf{LJ}^{\perp}$. Presentiamo, infine, alcune abbreviazioni e definizioni che utilizzeremo:

- la relazione di deducibilità sarà denotata con i simboli $\triangleright$ e $\triangleright_c$ rispettivamente per la logica intuizionistica e classica al prim'ordine, mentre comparirà "p" a pedice ($\triangleright_p$, $\triangleright_{pc}$) se ci limitiamo al frammento proposizionale rispettivamente intuizionistico e classico. In particolare $G_1, \dots, G_n \triangleright_p F$ significa che c'è una deduzione di F con assunzioni attive comprese tra $G_1, \dots G_n$ nel calcolo proposizionale intuizionistico;

- dato un modello $\mathcal{K}$, la soddisfacibilità di una formula F in $\mathcal{K}$ è indicata con $\mathcal{K} \vDash F$;

- denoteremo con $F \equiv G$ la formula $(F \to G) \wedge (G \to F)$; $\neg\bot$ con $\top$; $F \to \bot$ con $\neg F$;

- denoteremo con $F(c)$ l'esito della sostituzione della costante c alla variabile libera che occorre nella formula F; con $F\{\vec{x}/\vec{c}\}$ l'esito della sostituzione simultanea delle costanti $c_1, \ldots, c_n$ (denotate sinteticamente con $\vec{c}$) alle variabili libere $x_1, \ldots x_n$ (denotate sinteticamente con $\vec{x}$) che occorrono in F;

- un insieme K dotato di un ordine parziale $\leq$ è detto *albero* se esiste un unico elemento $\leq$-minimale (chiamato *radice*) e se per ogni $k \in K$, l'insieme $\{k' \in K : k' \leq k\}$ è ben ordinato dall'ordine indotto da $\leq$.

Risultati importanti

Nel corso della trattazione assumeremo che il lettore sia un po' familiare con la deduzione naturale **N**: in particolare, la deducibilità intuizionistica di alcune formule (ad esempio, $\neg(F \wedge \neg F)$ o $F \to \neg\neg F$, per una generica formula F) non verrà dimostrata, mentre le deduzioni meno banali che utilizzeremo saranno provate.

Daremo per noti, anche, alcuni dei risultati più basilari, ma comunque utilissimi, riguardo la logica intuizionistica. Qui presentiamo solo gli enunciati, rimandando a [Par20.a] per loro dimostrazioni.

Teorema 1.1. *Siano $A_1, \ldots, A_n$ formule atomiche del linguaggio che consideriamo. Valgono le seguenti:*

- proprietà della disgiunzione*: se F, G sono due formule per cui $F \vee G$ è deducibile da $A_1, \ldots, A_n$, allora $A_1, \ldots, A_n \triangleright F$ oppure $A_1, \ldots, A_n \triangleright G$. Tale proprietà vale anche se ci limitiamo al frammento proposizionale della logica intuizionistica;*

- proprietà dell'esistenziale*: se F è una formula per cui $\exists x F$ è deducibile da $A_1, \ldots, A_n$, allora per qualche termine t del linguaggio, $A_1, \ldots, A_n \triangleright F\{x/t\}$.*

Teorema 1.2. *(Glivenko) Sia F una formula. Allora:*

- $\triangleright_{pc} F$ *se e solo se* $\triangleright_p \neg\neg F$;

- $\triangleright_{pc} \neg F$ *se e solo se* $\triangleright_p \neg F$;

Struttura dell'elaborato

Il lavoro si concentrerà essenzialmente sullo studio semantico della logica intuizionistica. L'analisi verrà condotta attraverso ragionamenti metamatematici classici.

Nel Capitolo 2 verrà presentata la semantica dei mondi possibili proposta da S. Kripke nel 1965 in [Kri65]. Forniremo le definizioni principali e dimostreremo l'adeguatezza di una tale semantica per la logica in questione attraverso il Teorema 2.2 e il Teorema 2.3. Concluderemo questa parte mostrando il Teorema 2.7, uno dei risultati di maggiore importanza nella teoria dei modelli intuizionistici.

Nel Capitolo 3 ci soffermeremo maggiormente sul legame tra la logica intuizionistica e le semantiche con valori di verità: esporremo quindi il risultato di Gödel che sancisce l'impossibilità di trovare una semantica vero-funzionale con un numero finito di valori di verità (Teorema 3.3). Si cercherà poi, con un approccio "bottom-up" come quello presentato in [Par12], di creare una semantica non vero-funzionale basata ancora sui valori di verità e sul concetto di valutazione. Questo modo di procedere, pur avendo limiti intrinsechi analoghi a quelli evidenziati da Gödel, ci condurrà in maniera naturale agli stessi modelli presentati nel Capitolo 2, fornendo una giustificazione alternativa, basata su deduzioni e valutazioni, alla semantica di Kripke. Infine, si procederà a saldare ancora di più il legame tra quest'ultima e le valutazioni grazie al Teorema 3.8 e al Teorema 3.9.

Al lettore potrà risultare utile l'Appendice A in cui sono riportate alcune delle deduzioni che verranno utilizzate nel lavoro. Abbiamo preferito dividerle dal corpo principale del testo per rendere più fluido il discorso e facilitare la lettura.

2 Semantica di Kripke

2.1 Definizione dei modelli di Kripke

In questa sezione presentiamo la semantica proposta da S. Kripke in [Kri65] per la logica intuizionistica. Storicamente la semantica in questione non nasce specificatamente per la logica intuizionistica, ma per la logica modale, come è possibile notare in [Kri63]. Già Gödel nel 1933 in [Göd33] aveva notato un stretto legame tra **S4**, una particolare logica modale classica, e la logica intuizionistica: in particolare, egli osserva l'esistenza di una mappa tra formule che permette di "tradurre" la seconda nella prima. Il lavoro di Gödel è ispirato essenzialmente dall'idea che la nozione di dimostrabilità possa consentire di interpretare la logica intuizionistica in quella classica. Pertanto $\Box F$ significherà informalmente che "F è dimostrabile" [12]. Si giunge quindi alla mappa β tale che:

$$\begin{aligned}
\beta(\bot) &= \Box\bot \\
\beta(F) &= \Box F \text{ se } F \text{ è atomica;} \\
\beta(F \wedge G) &= \beta(F) \wedge \beta(G); \\
\beta(F \vee G) &= \beta(F) \vee \beta(G); \\
\beta(\neg F) &= \Box\neg\beta(F); \\
\beta(F \to G) &= \Box(\beta(F) \to \beta(G)); \\
\beta(\exists x F) &= \exists x \beta(F); \\
\beta(\forall x F) &= \Box\forall x \beta(F).
\end{aligned}$$

Tale funzione permette di esplicitare molto bene il legame tra il sistema **S4** e la logica intuizionistica, in quanto vale che per una generica formula F, $\rhd F$ se e solo se $\rhd_{\mathbf{S4}}\beta(F)$, dove il simbolo $\rhd_{\mathbf{S4}}$ rappresenta la deducibilità in **S4**.

Visto quanto detto precedentemente, dovrebbe essere chiaro come sviluppare una semantica per la logica intuizionistica da una per il sistema **S4** e in generale per le logiche modali. Nel seguito, visto l'interesse del lavoro, ci limiteremo soltanto a descrivere la prima.

[12] Nel caso delle teorie, la questione è molto più delicata: la corrispondenza tra $\Box$ e il concetto di dimostrabilità e quindi tra **S4** e una teoria della provabilità, all'interno di un sistema assiomatico, non è del tutto giustificata e in questa nota accenneremo solo brevemente e in maniera imprecisa ad un possibile motivo. Lo stesso Gödel osserva l'esistenza di problemi nelle formule che presentano occorrenze di $\Box$ annidate, come ad esempio nella seguente formula deducibile in **S4** $\Box\neg(\Box\bot)$. Sotto l'interpretazione presentata di $\Box$, tale teorema indicherebbe la possibilità da parte di una teoria di dimostrare la propria coerenza e dunque la deducibilità di tale teorema andrebbe in contrasto con il secondo Teorema di Incompletezza.

Definizione 2.1. Un modello proposizionale di Kripke per il linguaggio $\mathcal{L}$ è una terna $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$, dove K è un insieme non vuoto [13], $\leq$ è un ordine parziale su esso e, denotando con $\mathscr{P}$ l'insieme delle formule atomiche del linguaggio $\mathcal{L}$, $\Vdash$ è una relazione binaria su $K \times \mathscr{P}$ tale che

Kr0) se $k \Vdash A$ e $k' \geq k$, allora $k' \Vdash A$;

Kr1) Per nessun k accade che $k \Vdash \bot$.

Possiamo inoltre estendere la relazione $\Vdash$ appena definita a tutte le formule del linguaggio in modo tale che valgano:

Kr2) $k \Vdash G \wedge F$ se e solo se $k \Vdash G$ e $k \Vdash F$;

Kr3) $k \Vdash G \vee F$ se e solo se $k \Vdash G$ o $k \Vdash F$;

Kr4) $k \Vdash G \to F$ se e solo se per ogni $k' \geq k$, $k' \nVdash G$ o $k' \Vdash F$ [14];

Kr5) $k \Vdash \neg F$ se e solo se $\forall k' \geq k\ k' \nVdash F$;

Kr6) $k \Vdash \neg\neg F$ se e solo se $\forall k' \geq k\ (\exists k'' \geq k'\ k'' \Vdash F)$. [15]

Si può osservare, in realtà, che Kr5) e Kr6) sono dirette conseguenze di Kr4). Infatti, come già detto nell'Introduzione, intendendo $\neg F$ come un'abbreviazione per $F \to \bot$ e considerando che nessun nodo può forzare $\bot$, Kr5) diventa una formulazione particolare di Kr4). Applicando poi Kr5) non ad F e a $\neg F$, ma a $\neg F$ e $\neg\neg F$, si ottiene immediatamente Kr6).

Una formula F sarà *soddisfatta* nel modello $\mathcal{K}$ (in simboli $\mathcal{K} \vDash F$) se per ogni elemento $k \in K$ $k \Vdash F$; si dirà *valida secondo Kripke* se è soddisfatta in ogni modello. Date $G_1, \ldots, G_n, F$ formule, si dirà che F è *conseguenza*

[13] In alcuni testi, fedeli all'approccio intuizionistico, si trova scritto *"abitato"*. La distinzione non è presente al livello classico, ma appare intuizionisticamente. Infatti, che un insieme A è non vuoto ($\neg(\forall x\ \neg(x \in A))$) deriva dal fatto che è abitato ($\exists x\ x \in A$), ma non vale il viceversa in logica intuizionistica.

[14] Nei testi più fedeli all'approccio intuizionistico, si trova la seguente definizione, diversa da quella data sopra ma ad essa classicamente equivalente.

$$k \Vdash F \to G \quad \text{se e solo se} \quad \forall k' \geq k \text{ se } k \Vdash F, \text{ allora } k \Vdash G.$$

[15] Nei testi più fedeli all'approccio intuizionistico, si trova la seguente definizione, diversa da quella data sopra ma ad essa classicamente equivalente.

$$k \Vdash \neg\neg F \quad \text{se e solo se} \quad \forall k' \geq k\ \neg(\forall k'' \geq k'\ k'' \nVdash F)$$

semantica secondo Kripke di $G_1, \dots, G_n$ (in simboli $G_1, \dots, G_n \vDash F$), se ogni modello $\mathcal{K}$ che soddisfa $G_1, \dots, G_n$ soddisfa anche F.

Nel seguito ci riferiremo ad un generico modello di Kripke chiamandolo semplicemente modello. Semplificazioni analoghe verranno fatte per il concetto di soddisfacibilità, validità e conseguenza semantica, a meno che non ci sia bisogno di un'effettiva distinzione tra le nozioni appena introdotte e le analoghe classiche. Chiameremo infine ogni elemento di K nodo e diremo che k *forza* F per indicare $k \Vdash F$.

Dalla definizione appena data discende il seguente fatto utile. Dato un modello $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ e preso un suo nodo k, possiamo definire il troncamento di $\mathcal{K}$ a k come la terna $(K', \leq', \Vdash')$ in cui $K' = \{k' \in K \ : \ k' \geq k\}$ e $\leq'$ e $\Vdash'$ sono le restrizioni a K' rispettivamente di $\leq$ e $\Vdash$. È immediato dimostrare che tale troncamento, indicato usualmente con $\mathcal{K}_k$ è ancora un modello di Kripke.

La semantica appena introdotta si dimostrerà essere adeguata per il calcolo proposizionale intuizionistico (Cfr. Corollario 2.6). Prima di proseguire, vale la pena osservare che la logica intuizionistica non è completa per la semantica classica, sebbene quest'ultima risulti corretta per tale calcolo. A riprova di ciò, possiamo infatti rintracciare una classe di modelli che corrispondono alle valutazioni della semantica classica.

Lemma 2.1. *La semantica delle valutazioni classica equivale alla semantica di Kripke ristretta ai modelli che contano un solo nodo.*

Dimostrazione. Sia v una valutazione classica. Definiamo un modello di Kripke $\mathcal{K}$ considerando un solo nodo k e imponendo per ogni A atomica $k \Vdash A$ se e solo se $v(A) = \mathbf{v}$. Estendiamo poi in base a Kr1)-Kr6) la definizione di $\Vdash$ anche a formule non atomiche. Dimostriamo quindi che per ogni formula F, $v(F) = \mathbf{v}$ se e solo se $k \Vdash F$, procedendo per induzione sull'altezza di F. Per le formule atomiche ciò è vero per come definito precedentemente $k \Vdash A$; per il passo induttivo notiamo che:

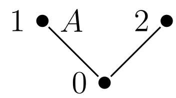
$$k \Vdash G \wedge F \Leftrightarrow k \Vdash G \text{ e } k \Vdash F \Leftrightarrow v(G) = \mathbf{v} \text{ e } v(F) = \mathbf{v} \Leftrightarrow v(G \wedge F) = \mathbf{v};$$
$$k \Vdash G \vee F \Leftrightarrow k \Vdash G \text{ o } k \Vdash F \Leftrightarrow v(G) = \mathbf{v} \text{ o } v(F) = \mathbf{v} \Leftrightarrow v(G \vee F) = \mathbf{v};$$
$$k \Vdash G \to F \Leftrightarrow k \nVdash G \text{ o } k \Vdash F \Leftrightarrow v(G) = \mathbf{f} \text{ o } v(F) = \mathbf{v} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v(G \to F) = \mathbf{v};$$
$$k \Vdash \neg F \Leftrightarrow k \nVdash F \Leftrightarrow v(F) = \mathbf{f} \Leftrightarrow v(\neg F) = \mathbf{v}.$$

Considerazioni analoghe mostrano anche il viceversa. Sia $\mathcal{K}$ un modello di Kripke con un solo nodo k. Definiamo la valutazione v tale che, data una formula F, $v(F) = \mathbf{v}$ se e solo se $k \Vdash F$. Così definita, v è effettivamente una valutazione classica. Ciò può essere mostrato con un ragionamento induttivo basato sulle altezze delle formule che ripercorre (da destra verso sinistra) le equivalenze logiche sopra scritte. □

Presentiamo adesso alcuni modelli che ci permettono di capire che la semantica di Kripke appena introdotta differisce effettivamente da quella classica. Cogliamo l'occasione per presentare alcune convenzioni che vengono usate in letteratura relativamente a tali modelli e che nel seguito adotteremo anche noi. Per motivi di comodità e chiarezza, di norma un nodo è etichettato col suo "nome" (di solito $0, 1, \dots$ oppure $k, k', k_0, k_1, \dots$) ed, eventualmente, con delle formule atomiche secondo la seguente regola: k è etichettato con A se e solo se $k \Vdash A$ ed è minimale (rispetto all'ordine $\leq$ del modello) con tale proprietà. Ne segue che, se A è atomica, un nodo forza A se e solo se è etichettato con A o un suo predecessore lo è.

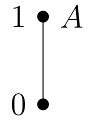
Nel seguito indicheremo con A e B generiche formule atomiche.

Esempio 2.1.



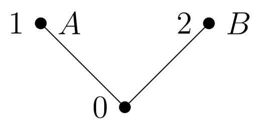
Il disegno sopra rappresenta un modello di Kripke, che chiameremo $\mathcal{K}_1$, formato da tre nodi ($K = \{0, 1, 2\}$) tali che $0 \nVdash A$, $1 \Vdash A$ e $2 \nVdash A$, ovvero, per Kr5), $2 \Vdash \neg A$. Portiamo subito l'attenzione del lettore alla "parzialità" dei modelli di Kripke. La radice 0 non forza né A, né $\neg A$: il primo fatto è comprensibile anche osservando le etichette in base alla convenzione discussa sopra; il secondo discende invece dal contrasto tra la presenza del nodo 1 che forza A e la condizione in Kr5). $\mathcal{K}_1 \nvDash A \vee \neg A$ in quanto $0 \nVdash A$ e $0 \nVdash \neg A$. Tale modello soddisfa, invece, la legge di doppia negazione per A, altro principio valido solo classicamente. Per mostrare ciò, dobbiamo convincerci del fatto che ogni nodo forzi $\neg\neg A \to A$ o, equivalentemente, vista la validità di Kr0), che $0 \Vdash \neg\neg A \to A$. Per Kr6) né 0, né 2 forzano $\neg\neg A$, mentre $1 \Vdash \neg\neg A$. Poiché 1 forza anche A, si dimostra quanto voluto.

Esempio 2.2.



Il modello in figura, che chiameremo $\mathcal{K}_2$, non soddisfa né il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$, né la legge della doppia negazione per A, ovvero $\mathcal{K}_2 \not\models \neg\neg A \to A$. Infatti, poiché $1 \Vdash A$, per Kr6), $0 \Vdash \neg\neg A$, tuttavia $0 \nVdash A$ e per Kr4) $0 \nVdash \neg\neg A \to A$.

Esempio 2.3.



Il modello in figura non soddisfa $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$, la legge di De Morgan che non è dimostrabile intuizionisticamente. Poiché $1 \nVdash B$, $1 \nVdash A \wedge B$ e analogamente $2 \nVdash A \wedge B$ e $0 \nVdash A \wedge B$, quindi $0 \Vdash \neg(A \wedge B)$. Tuttavia $0 \nVdash \neg A \vee \neg B$ dal momento che 0 non forza né $\neg A$ (poiché $1 \Vdash A$), né $\neg B$ (poiché $2 \Vdash B$).

Dopo aver discusso alcune proprietà dei modelli di Kripke per la logica proposizionale, cerchiamo di estendere la definizione anche per la logica al primo ordine.

Definizione 2.2. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio senza simboli funzionali. Un modello di Kripke $\mathcal{K}$ è una quaterna $(K, \leq, D, \Vdash)$, con K non vuoto tale che:

- $(K, \leq)$ è un ordine parziale;
- D è una funzione che ad ogni nodo k associa un insieme non vuoto $D(k)$ e per ogni nodo $k' \geq k$, $D(k') \supseteq D(k)$;
- $\Vdash$ è una relazione in $K \times \mathscr{P}$, dove $\mathscr{P}$ è l'insieme delle formule atomiche del linguaggio ampliato con un simbolo di costante per ogni elemento di $\mathbb{D} = \bigcup_{k \in K} D(k)$. Richiediamo inoltre le condizione Kr0) e Kr1) della Definizione 2.1 e che se R è un simbolo relazionale n-ario, $d_1, \ldots, d_n$ elementi di $\mathbb{D}$ e $k \Vdash R(d_1, \ldots, d_n)$, allora implicitamente stiamo assumendo anche che $d_1, \ldots, d_n$ siano elementi di $D(k)$.

Analogamente al caso proposizionale, possiamo estendere la relazione $\Vdash$ a tutte gli enunciati del linguaggio $\mathcal{L}$ esteso con un simbolo di costante per ogni elemento di $\mathbb{D}$. Basterà imporre oltre alle condizioni Kr2)-Kr6) (già presentate successivamente alla Definizione 2.1), alcune ad hoc per le formule con quantificatori:

Kr7) $k \Vdash \exists x F(x)$ se e solo se esiste $d \in D(k)$ tale che $k \Vdash F(d)$;

Kr8) $k \Vdash \forall x F(x)$ se e solo se per ogni nodo $k' \geq k$ e per ogni elemento $d \in D(k')$, $k' \Vdash F(d)$.

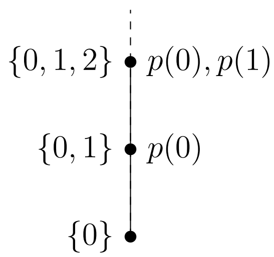
Per gli scopi futuri sarà utile estendere la relazione di forcing anche per formule non chiuse. Se $F(x_1, \ldots, x_n)$ ha come variabili libere esattamente $x_1, \ldots, x_n$ e k è un nodo di K, diremo che $k \Vdash F(x_1, \ldots, x_n)$ se e solo se per ogni n-upla di elementi $d_1, \ldots, d_n$ in $D(k)$, $k \Vdash F(d_1, \ldots, d_n)$.

Abbiamo ora tutto il necessario per definire quando una formula è soddisfatta in un modello di Kripke.

Definizione 2.3. Siano F una formula, Γ un insieme di formule e $\mathcal{K}$ un modello di Kripke. Se F non contiene costanti, diremo che è *soddisfatta* in $\mathcal{K}$ se ogni nodo $k \in K$ forza F; altrimenti, se in F occorrono costanti $d_1, \ldots, d_n$, diremo che è *soddisfatta* in $\mathcal{K}$ se ogni nodo $k \in K$ per cui $d_1, \ldots, d_n \in D(k)$, forza F. F è *valida* se è soddisfatta in ogni modello. Se Γ e F sono enunciati, allora F è *conseguenza semantica* di Γ (in simboli $\Gamma \vDash F$) se ogni modello che soddisfa Γ, soddisfa anche F; nel caso in cui Γ e F presentino occorrenze delle variabili libere comprese tra $x_1, \ldots, x_n$, allora $\Gamma \vDash F$ se per ogni modello $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash, D)$ e ogni n-upla di costanti $d_1, \ldots, d_n$ in $\mathbb{D} = \bigcup_{k \in K} D(k)$, si ha $\Gamma\{x_1/d_1, \ldots x_n/d_n\} \vDash F(d_1, \ldots, d_n)$.

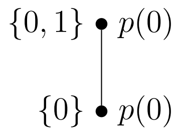
Mostriamo che, anche nel caso di formule con quantificatori, ovviamente, si misura la distanza tra la semantica classica e quella di Kripke. Lo faremo, come nel caso proposizionale, esibendo modelli che non soddisfano formule classicamente ritenute valide.

Esempio 2.4.



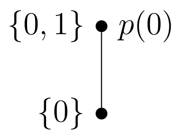
Per comodità grafica abbiamo omesso il nome dei nodi: alla radice ci riferiamo con 0, il nodo successivo per noi sarà 1 e così via a seguire. Come si intuisce dal disegno, il modello ha un nodo per ogni numero naturale e preso $k \in \mathbb{N}$, $D(k) = \{0, \ldots, k\}$ e $k \Vdash p(m)$ per ogni $m < k$. Esso non soddisfa le seguenti formule $\forall x(p(x) \vee \neg p(x))$ e $\forall x \neg\neg p(x) \to \neg\neg \forall x p(x)$, legate rispettivamente al principio del terzo escluso e alla legge di doppia negazione. Per il primo enunciato basta osservare che $0 \nVdash p(0)$ e, visto che $1 \Vdash p(0)$, $0 \nVdash \neg p(0)$. Pertanto $0 \nVdash p(0) \vee \neg p(0)$ e dunque 0 non forza neanche $\forall x(p(x) \vee \neg p(x))$. Per la seconda asserzione, notiamo che il nodo n forza $p(0), \ldots, p(n-1)$ e inoltre $\neg\neg p(n)$ per Kr6). Quindi $n \Vdash \neg\neg p(0), \ldots, \neg\neg p(n)$, ovvero, essendo $D(n) = \{0, \ldots, n\}$, ogni nodo forza $\forall x \neg\neg p(x)$ per Kr8). Nessun nodo forza però $\forall x p(x)$, visto che $n \nVdash p(n)$: in particolare, per Kr6), $0 \nVdash \neg\neg\forall x p(x)$. Da ciò segue che $0 \nVdash \forall x \neg\neg p(x) \to \neg\neg\forall x p(x)$.

Esempio 2.5.



Il modello presentato non soddisfa $\exists x(p(x) \to \forall y p(y))$, infatti, $0 \nVdash p(0) \to \forall y p(y)$ e questo garantisce per Kr7) la tesi. Ci si convince facilmente di ciò notando che $1 \nVdash p(1)$ e quindi $0 \nVdash \forall y p(y)$, mentre $0 \Vdash p(0)$.

Esempio 2.6.



Il modello non soddisfa $\neg\forall x p(x) \to \exists x \neg p(x)$. Per Kr5) e Kr8), poiché $0 \nVdash p(0)$ e $1 \nVdash p(1)$, entrambi i nodi non forzano $\forall x p(x)$ e quindi $0 \Vdash \neg\forall x p(x)$. Tuttavia, $0 \nVdash \exists x \neg p(x)$, visto che $D(0) = \{0\}$ e $0 \nVdash \neg p(0)$ (poiché $1 \Vdash p(0)$).

Per rendere più completa la trattazione, definiamo i modelli di Kripke anche per un linguaggio che contiene simboli funzionali.

Definizione 2.4. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio. Un modello di Kripke $\mathcal{K}$ è una quaterna $(K, \leq, D, \Vdash)$ con K non vuoto tale che:

- $(K, \leq)$ è un ordine parziale;
- D è una funzione che ad ogni nodo k associa una struttura insiemistica $\mathbb{D}(k)$ per il linguaggio $\mathcal{L}$. Chiamando $D(k)$ il dominio di $\mathbb{D}(k)$ e considerando due nodi k e k' con $k \leq k'$, si richiedono le ulteriori proprietà:
  - $D(k) \subseteq D(k')$;

– se R è un simbolo relazionale n-ario, indicando per ogni nodo k con R_k il sottoinsieme di $D(k)^n$ relativo al simbolo R nella struttura insiemistica $D(k)$, allora $R_k \subseteq R_{k'}$;

– se f è un simbolo funzionale n-ario, indicando per ogni nodo i con f_i la funzione da $D(i)^n$ a $D(i)$ corrispondente all'interpretazione di tale simbolo nella struttura insiemistica $D(i)$, allora per ogni $d_1, \dots, d_n$ elementi di $D(k)$, $f_k(d_1, \dots, d_n) = f_{k'}(d_1, \dots, d_n)$.

- $\Vdash$ è una relazione in $K \times \mathscr{P}$, dove $\mathscr{P}$ è l'insieme delle formule atomiche del linguaggio ampliato con un simbolo di costante per ogni elemento di $\mathbb{D} = \bigcup_{k \in K} D(k)$. Richiediamo, inoltre, le condizioni della Definizione 2.2.

2.2 Euristica proposta da Kripke

Prima di proseguire mostrando che la semantica proposta è adeguata per la logica intuizionistica, presentiamo l'idea intuitiva sottostante a questi modelli così come proposta dall'autore stesso in [Kri65]. Come già detto all'inizio del capitolo, la semantica in questione nasce prima per le logiche modali e poi, attraverso la "traduzione" nel sistema **S4** della logica intuizionistica, si trasferisce a quest'ultima. Lo stesso Kripke in [Kri65] afferma di preferire, comunque, uno sviluppo di una tale semantica indipendentemente da quella di **S4**, in quanto "un tale procedimento permetterà di ottenere qualche informazione aggiuntiva sulla logica intuizionistica".

Nella sua trattazione euristica, Kripke considera i modelli $(\mathcal{K}, \leq, D, \Vdash)$ per cui $(K, \leq)$ è un albero. In realtà, dalla dimostrazione del Teorema 2.3 segue che non è restrittivo limitarsi a questa classe. Rimanendo fedeli all'approccio dell'autore, riportiamo un suo stesso esempio e lo commentiamo citandolo, quando ciò non inficia la scorrevolezza del discorso.

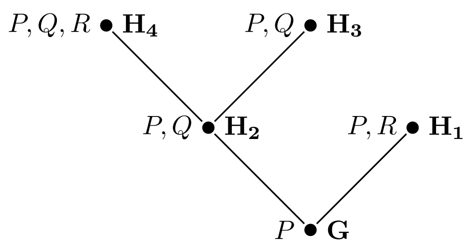


Figura 1: Esempio tratto da [Kri65]

Nella Figura 1 il nome dei nodi è indicato in grassetto e a destra, mentre a sinistra compaiono le formule atomiche forzate; l'ordine nell'albero è quello intuibile dalla figura, ovvero $\mathbf{G} \leq \mathbf{H_1}$, $\mathbf{G} \leq \mathbf{H_2} \leq \mathbf{H_3}$, $\mathbf{G} \leq \mathbf{H_2} \leq \mathbf{H_4}$ e non sussistono altre relazioni.

Ogni modello rappresenta un possibile scenario dell'attività matematica: i nodi sono dunque dei "punti nel tempo nei quali possiamo avere delle informazioni", $\leq$ non è altro che l'ordine temporale e $\Vdash$ è la relazione che lega gli istanti temporali e le informazioni che ivi si hanno. Può accadere che ad un certo istante, ad esempio in $\mathbf{G}$, siamo in grado di riconoscere vera la formula P; successivamente, col tempo, possiamo acquisire informazioni sufficienti per giungere anche alla verità di R e dunque spostarci dal nodo $\mathbf{G}$ al nodo $\mathbf{H_1}$. Tuttavia, la rappresentazione data nella Figura 1 dell'attività matematica, non esclude altri casi: potrebbe infatti accadere che nell'istante successivo non conosciamo R, bensì Q e dunque ci spostiamo nel nodo $\mathbf{H_2}$.

Come fa notare Kripke, se $\mathbf{H} \Vdash F$ allora informalmente possiamo dire che la verità di F è stata verificata all'istante $\mathbf{H}$; se, invece, $\mathbf{H} \nVdash F$, allora non significa che a quell'istante è stata provata la falsità di F, ma semplicemente che la sua verità non è stata ancora provata e potrebbe esserlo nel seguito.

È istruttivo osservare che i nodi $\mathbf{H_2}$ e $\mathbf{H_3}$ forzano le stesse formule atomiche P, Q, ma comunque c'è una differenza tra le due posizioni. Con le parole di Kripke: "possiamo rimanere fermi per un tempo arbitrario al nodo $\mathbf{H_2}$ [. . .] ma poi possiamo avanzare in $\mathbf{H_3}$ o in $\mathbf{H_4}$. Notiamo che saltando alla situazione $\mathbf{H_3}$, non abbiamo ancora provato nulla di più di P e Q; ma questo non significa che la situazione $\mathbf{H_3}$ è uguale esattamente a $\mathbf{H_2}$. Infatti, finché rimaniamo in $\mathbf{H_2}$, la possibilità di avanzare in $\mathbf{H_4}$ e di provare R è ancora aperta a noi; ma se siamo nella situazione $\mathbf{H_3}$, abbiamo guadagnato abbastanza informazioni da escludere l'opzione che R verrà provata nel seguito".

Dai discorsi precedenti, si evince il ruolo della radice $\mathbf{G}$ in tale spiegazione euristica: rappresenta il presente, la conoscenza attuale delle varie formule matematiche.

Dall'interpretazione dei modelli come rappresentazione dell'evolversi dell'attività matematica, segue la ragionevolezza dell'imporre la regole Kr0): "non dimentichiamo" col passare del tempo le conoscenze pregresse acquisite. L'intuizione dietro le regole Kr2) e Kr3) è altrettanto chiara: ad un istante $\mathbf{H}$ proviamo la verità di $F \wedge G$ ($F \vee G$) se in quell'istante proviamo la verità di F e (o) la verità di G.

Le regole che governano il $\rightarrow$, e di conseguenza il $\neg$, sono invece diverse: "per asserire $\neg A$ intuizionisticamente nella situazione $\mathbf{H}$ deve accadere non solo che A non sia verificata all'istante in questione, ma anche che non sarà verificata in un qualsiasi istante futuro, indipendentemente da quanta informazione viene guadagnata. [. . .] Ancora, per asserire $A \rightarrow B$ in un istante

$\mathbf{H}$, dobbiamo aver bisogno che in una qualsiasi situazione successiva $\mathbf{H}'$ nella quale abbiamo una prova di A, abbiamo anche una prova di B".

Per chiarire le idee, presentiamo la spiegazione relativa al modello $\mathcal{K}_2$ dell'Esempio 2.2. Esso, come abbiamo avuto modo di verificare, non soddisfa l'istanza del principio del terzo escluso $A \vee \neg A$. Intuitivamente questo accade perché nel presente (al nodo 0) non abbiamo ancora né provato A, né possiamo asserire $\neg A$ "perché rimane ancora aperta la possibilità di ottenere nel futuro abbastanza informazioni per avanzare" nel nodo successivo e dimostrare A.

Trattiamo ora i quantificatori: non saremo puntuali come nel caso proposizionale ma ometteremo alcune parti del ragionamento di Kripke quando ciò non provocherà incomprensioni. La differenza sostanziale tra i modelli per la logica proposizionale e quelli per la logica al prim'ordine è l'introduzione per ogni nodo $\mathbf{H}$ di un dominio $D(\mathbf{H})$ e di un dominio totale $\mathbb{D}$ che è l'unione dei vari $D(\mathbf{H})$ al variare dei nodi $\mathbf{H}$ nel modello. In base all'euristica proposta da Kripke gli oggetti in $D(\mathbf{H})$ vengono interpretati come "tutti gli individui che conosciamo essere in $\mathbb{D}$ sulla base delle informazioni disponibili all'istante $\mathbf{H}$". Siccome "non dimentichiamo", come evidenziato parlando della regola Kr0), anche gli oggetti della cui esistenza abbiamo consapevolezza si accumulano col tempo e questo spiega perché, nella Definizione 2.2, abbiamo richiesto per $k \leq k'$ che $D(k) \subseteq D(k')$.

Osserviamo che nella situazione $\mathbf{H}$, per riconoscere la verità di $\forall x F$, "non solo dobbiamo sapere che F è vera per ogni $d \in D(\mathbf{H})$, ma anche per ogni individuo che si proverà appartenere a $\mathbb{D}$ nel futuro". D'altro canto, "per asserire l'esistenza di un $x \in \mathbb{D}$ per cui F è vera, dobbiamo trovare un elemento x per cui già abbiamo mostrato l'appartenenza a $\mathbb{D}$ tale che F è vera".

2.3 Teorema di Adeguatezza e raffinamenti

Lo scopo di questa sezione è mostrare il Corollario 2.6, ovvero che la semantica di Kripke è adeguata per la logica intuizionistica: in particolare che se $G_1, \ldots, G_n, F$ sono formule, allora $G_1, \ldots, G_n \rhd F$ se e solo se $G_1, \ldots, G_n \models F$. Iniziamo dal Teorema di Correttezza.

Teorema 2.2 (Correttezza)**.** *Siano $G_1, \ldots, G_n, F$ tali che $G_1, \ldots, G_n \rhd F$. Allora $G_1, \ldots, G_n \models F$.*

Dimostrazione. Utilizziamo come sistema deduttivo il calcolo dei sequenti $\mathbf{LJ}^{\perp}$. La dimostrazione procede per induzione sull'altezza della derivazione. Presentiamo dunque alcuni dei casi che si possono verificare, analizzando l'ultima regola applicata:

$\Rightarrow \wedge)$

$$\frac{G_1, \ldots, G_n \Rightarrow F_1 \qquad G_1, \ldots, G_n \Rightarrow F_2}{G_1, \ldots, G_n \Rightarrow F_1 \wedge F_2}$$

Supponiamo che F sia della forma $F_1 \wedge F_2$ e che F_1 ed F_2 siano conseguenze semantiche di $G_1, \ldots, G_n$. Considerando allora un modello $\mathcal{K}$ per $G_1, \ldots, G_n$, ogni nodo forzerà F_1 e F_2, di conseguenza per Kr1) anche $F_1 \wedge F_2$ e quindi $\mathcal{K} \vDash F$;

$\vee \Rightarrow)$

$$\frac{H_1, G_2 \ldots, G_n \Rightarrow F \qquad H_2, G_2 \ldots, G_n \Rightarrow F}{H_1 \vee H_2, G_2 \ldots, G_n \Rightarrow F}$$

Supponiamo che G_1 sia della forma $H_1 \vee H_2$ e che F sia conseguenza semantica sia di $H_1, G_2, \ldots G_n$, che di $H_2, G_2, \ldots G_n$. Considerando un modello $\mathcal{K}$ per $G_1, G_2, \ldots, G_n$, per Kr2), ogni nodo k forzerà $H_1, G_2, \ldots G_n$ oppure $H_2, G_2, \ldots G_n$. In particolare il modello troncato $\mathcal{K}_k$, per le assunzioni fatte, soddisfa F e quindi $k \Vdash F$. Dall'arbitrarietà di k segue la tesi;

$\Rightarrow \neg)$

$$\frac{H, G_1 \ldots, G_n \Rightarrow}{G_1 \ldots, G_n \Rightarrow \neg H}$$

Supponiamo che F sia della forma $\neg H$ e che non esista un modello per $H, G_1, \ldots, G_n$. Consideriamo un modello $\mathcal{K}$ per $G_1, \ldots, G_n$. Ogni nodo k non può forzare H, altrimenti il modello troncato $\mathcal{K}_k$ soddisferebbe $H, G_1, \ldots, G_n$. Allora per Kr5), ogni nodo forza $\neg H$ e quindi $\mathcal{K} \vDash \neg H$;

$\rightarrow \Rightarrow)$

$$\frac{G_2 \ldots, G_n \Rightarrow H_1 \qquad H_2, G_2 \ldots, G_n \Rightarrow F}{H_1 \rightarrow H_2, G_2 \ldots, G_n \Rightarrow F}$$

Supponiamo che G_1 sia della forma $H_1 \rightarrow H_2$, che $G_2, \ldots, G_n \vDash H_1$ e $H_2, G_2, \ldots, G_n \vDash F$. Consideriamo un modello $\mathcal{K}$ per $G_1, \ldots G_n$. Questo soddisferà anche H_1, quindi ogni nodo forzerà H_1 e, poiché $\mathcal{K} \vDash H_1 \rightarrow H_2$, ogni nodo forzerà anche H_2. Pertanto, $\mathcal{K} \vDash H_2$ e, per le ipotesi fatte, $\mathcal{K} \vDash F$;

$\exists \Leftarrow)$

$$\frac{H\{x/y\}, G_2 \ldots, G_n \Rightarrow F}{\exists x H, G_2 \ldots, G_n \Rightarrow F}$$

Supponiamo che G_1 sia della forma $\exists x H$, che la variabile y non occorra libera in $H, G_2, \ldots, G_n, F$ e che F sia conseguenza semantica di $H\{x/y\}, G_2, \ldots, G_n$. Per comodità espositiva assumiamo anche che non occorrano altre variabili oltre a quelle sopra elencate: nel caso contrario, comunque, la dimostrazione procede come segue, senza modifiche sostanziali. Sia $\mathcal{K}$ un modello per $\exists x H, G_2, \ldots, G_n$ e k un suo nodo. Allora $k \Vdash \exists x H$, ovvero esisterà $c \in D(k)$ tale che $k \Vdash H\{x/c\}$. Il modello troncato $\mathcal{K}_k$ soddisfa $H\{x/c\}, G_2, \ldots, G_n$, ovvero, per le assunzioni fatte sull'occorrenza di y, $\mathcal{K}_k \vDash H\{x/y\}\{y/c\}, G_2\{y/c\}, \ldots, G_n\{y/c\}$. Visto che la derivazione dell'ipotesi rimane valida sostituendo in tutto l'albero y con c, per ipotesi induttiva, $\mathcal{K}_k \vDash F\{y/c\}$, ma $F\{y/c\} = F$ e quindi $k \Vdash F$. Dall'arbitrarietà di k segue la tesi.

$\square$

Dimostriamo ora che il calcolo intuizionistico al primo ordine è completo rispetto alla semantica di Kripke.

Teorema 2.3 (Completezza)**.** *Siano $G_1, \ldots, G_n, F$ tali che $G_1, \ldots, G_n \vDash F$. Allora $G_1, \ldots, G_n \rhd F$.*

Forniremo una dimostrazione del Teorema 2.3 simile a quella proposta da L. Henkin per la completezza della logica classica. Seguiranno quindi alcune dimostrazioni e alcuni lemmi che risulteranno utili a tale fine.

Definizione 2.5. Dato C un insieme di costanti, un insieme di enunciati Γ nel linguaggio $\mathcal{L}$ si dice C-saturo se:

i) Γ è coerente (ovvero $\Gamma \ntriangleright \perp$);

ii) se $\Gamma \rhd F$, allora $F \in \Gamma$;

iii) se $\Gamma \rhd F \vee G$, allora $F \in \Gamma$ oppure $G \in \Gamma$;

iv) se $\Gamma \rhd \exists x F(x)$, allora per qualche $c \in C$, $F(c) \in \Gamma$.

Lemma 2.4 (di saturazione)**.** *Siano Γ un insieme di $\mathcal{L}$-enunciati, F un $\mathcal{L}$-enunciato con $\Gamma \ntriangleright F$. Sia inoltre $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$ un insieme numerabile di costanti non in $\mathcal{L}$. Esiste un insieme C-saturo Γ^ω che contiene Γ e tale che $\Gamma^\omega \ntriangleright F$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{L}(C)$ il linguaggio $\mathcal{L}$ ampliato con le costanti in C e sia $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un'enumerazione degli enunciati del linguaggio $\mathcal{L}(C)$, tali che ogni enunciato compare infinite volte. Definiamo per ricorsione una successione di insiemi di enunciati $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel seguente modo:

- $\Gamma_0 = \Gamma$;
- se $\Gamma_n \rhd F_n$ e F_n non è né esistenziale, né disgiuntiva, pongo $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_n\}$;
- Se $\Gamma_n \not\rhd F_n$, allora $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$;
- Se $\Gamma_n \rhd F_n$ e F_n è della forma $\exists x F_m(x)$, allora $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_n, F_m(c_{g(n)})\}$, dove $c_{g(n)}$ è la prima costante di C che non compare in nessuna formula di Γ_k con $k \leq n$;
- Se $\Gamma_n \rhd F_n$ e F_n è della forma $F_p \vee F_q$, allora $\Gamma_n, F_p \not\rhd F$ o $\Gamma_n, F_q \not\rhd F$ e pongo $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_n, F_i\}$, dove i è il minimo indice tale che $\Gamma_n, F_i \not\rhd F$.

Mostriamo che la definizione sopra fornita è corretta. Affinché si possa trovare al passo n-esimo, nel caso di una formula esistenziale, una costante $c_{g(n)}$, in Γ_n non devono occorrere tutte le costanti di C. Questo è il caso in quanto Γ è un insieme (eventualmente infinito) di $\mathcal{L}$-formule e quindi se in Γ_n compaiono costanti di C è perché queste sono state aggiunte in uno dei passi precedenti. Essi però sono in numero finito quindi in ogni Γ_n è presente solo una quantità finita di elementi di C.

Per quanto riguarda il caso in cui F_n è disgiuntiva, per dare senso a quanto scritto precedentemente, si deve mostrare che ad ogni passo, l'insieme di formule costruito Γ_n non deduce F: accadendo ciò, se $F_n = F_p \vee F_q$, allora non può accadere che sia da Γ_n, F_p che da Γ_n, F_q si deduca F perché questo comporterebbe che anche $\Gamma_n, F_n \rhd F$ e quindi che $\Gamma_n \rhd F$. Per provare questo fatto, si può procedere per induzione verificando che le eventuali formule che vengono aggiunte al passo n-esimo non permettono di dedurre F, se l'insieme di partenza Γ_n è tale che $\Gamma_n \not\rhd F$. L'unico caso a cui prestare attenzione è quando al passo n-esimo la formula F_n è esistenziale. Notiamo, però, che ogni $\mathcal{L}$-formula che si può dedurre da $\Gamma_n, \exists x G(x), G(c)$, dove c è una costante di $\mathcal{L}(C)$ che non compare né in Γ_n, né in G, può essere già dedotta da $\Gamma_n, \exists x G(x)$. Pertanto, se F non è deducibile da Γ_n e $\Gamma_n \rhd \exists x G(x)$, F non risulta deducibile neanche da $\Gamma_n, \exists x G(x)$ e $G(c)$.

Dopo aver verificato la correttezza della definizione data, chiamiamo $\Gamma^\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. Per induzione e basandosi su quanto detto nelle righe sopra, si prova facilmente che $\Gamma^\omega \not\rhd F$. Si può dimostrare, inoltre, che Γ^ω è C-saturo:

i) Γ^ω è coerente perché altrimenti dimostrerebbe per ex-falso tutte le formule di $\mathcal{L}(C)$ ma $\Gamma^\omega \not\rhd F$;

ii) se $\Gamma^\omega \rhd G$, allora per qualche m, $\Gamma_m \rhd G$. Quindi per come abbiamo definito l'enumerazione, esiste un indice $n > m$ per cui $G = F_n$. Per costruzione, dunque, $G \in \Gamma_{n+1}$;

iii) se $\Gamma^\omega \rhd G \vee H$, allora per qualche m, $\Gamma_m \rhd G \vee H$. Quindi per la definizione dell'enumerazione, esiste un indice $n > m$ per cui $G \vee H = F_n$. Per costruzione $G \in \Gamma_{n+1}$ oppure $H \in \Gamma_{n+1}$;

iv) se $\Gamma^\omega \rhd \exists x G(x)$, allora per qualche m, $\Gamma_m \rhd \exists x G(x)$. Quindi per come abbiamo definito l'enumerazione, esiste un indice $n > m$ per cui $\exists x G(x) = F_n$. Per costruzione, dunque, $G(c_{g(n)}) \in \Gamma_{n+1}$;

$\square$

La dimostrazione del Teorema 2.3 si baserà sulla creazione di un modello di Kripke opportuno sotto l'ipotesi di non deducibilità dall'insieme di enunciati Γ di F. Presentiamo dunque un metodo canonico di costruzione di tale modello. Consideriamo una famiglia numerabile di insiemi numerabili disgiunti di costanti $C_0, C_1 \ldots$ non presenti in $\mathcal{L}$. Denotiamo inoltre con C_n^* l'insieme $C_0 \cup \cdots \cup C_n$. Definiamo quindi il modello $\mathcal{K}_c = (K, \leq, \Vdash, D)$ come segue:

- $(K, \leq)$ è un albero in cui ogni nodo è un insieme di enunciati Γ' nel linguaggio $\mathcal{L} \cup C_n^*$, C_n^*-saturo, per qualche $n \in \mathbb{N}$;
- $\Gamma' \leq \Gamma''$ se e solo se $\Gamma' \subseteq \Gamma''$;
- dato un nodo Γ' e una formula atomica P nel linguaggio $\mathcal{L}(\Gamma')$, $\Gamma' \Vdash P$ se e solo se $P \in \Gamma'$;
- se Γ' è C_n^*-saturo, $D(\Gamma') = \{c : c \text{ costante in } \mathcal{L} \cup C_n^*\}$.

Si dimostra facilmente che $\mathcal{K}_c$ risulta un modello di Kripke e si intuisce, inoltre, per come è definito, che esso riflette la struttura del reticolo logico delle deduzioni possibili da Γ. Formalizziamo matematicamente questo concetto.

Lemma 2.5. *Per ogni nodo Γ' del modello canonico $\mathcal{K}_c$ e per ogni enunciato F in $\mathcal{L}(\Gamma')$, $\Gamma' \Vdash F$ se e solo se $F \in \Gamma'$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla complessità di F, sfruttando la saturazione dei nodi del modello canonico. In particolare, supponiamo che Γ' sia C_n^*-saturo e distinguiamo i vari casi:

- se F è atomica, è vero per costruzione;

- se F è della forma $G \wedge H$, allora $\Gamma' \Vdash F$ se e solo se $\Gamma' \Vdash G$ e $\Gamma' \Vdash H$. Per ipotesi induttiva questo accade se e solo se $G \in \Gamma'$ e $H \in \Gamma'$. Quindi $\Gamma' \rhd G \wedge H$ e per saturazione di Γ', $F \in \Gamma'$. Viceversa, se $F \in \Gamma'$, allora $\Gamma' \rhd H, G$. Per ipotesi induttiva, $\Gamma' \Vdash H$ e $\Gamma' \Vdash G$ e quindi $\Gamma' \Vdash F$;

- se F è della forma $G \vee H$, allora $\Gamma' \Vdash F$ se e solo se $\Gamma' \Vdash G$ o $\Gamma' \Vdash H$. Per ipotesi induttiva questo accade se e solo se $G \in \Gamma'$ o $H \in \Gamma'$. Quindi $\Gamma' \rhd G \vee H$ e per saturazione di Γ', $F \in \Gamma'$. Viceversa, se $F \in \Gamma'$, allora per saturazione $\Gamma' \rhd G$ o $\Gamma' \rhd H$ e, dunque, $G \in \Gamma'$ o $H \in \Gamma'$. Per ipotesi induttiva, $\Gamma' \Vdash G$ o $\Gamma' \Vdash H$ e, infine, $\Gamma' \Vdash F$;

- se F è della forma $G \to H$, allora $\Gamma' \Vdash F$ se e solo se per ogni nodo $\Gamma'' \supseteq \Gamma'$, se $\Gamma'' \Vdash G$, allora $\Gamma'' \Vdash H$. Dimostriamo che, in tal caso, $\Gamma' \rhd F$. Supponiamo non sia così e consideriamo l'insieme di formule $\Gamma' \cup \{G\}$. Notiamo che $\Gamma' \cup \{G\} \not\rhd H$, altrimenti $\Gamma' \rhd F$: dunque, per il Lemma 2.4, esiste Γ'' estensione satura di $\Gamma' \cup \{G\}$ tale che $\Gamma'' \not\rhd H$. Poiché $H \notin \Gamma''$, per ipotesi induttiva, $\Gamma'' \nVdash H$ ma $\Gamma'' \Vdash G$, contro $\Gamma' \Vdash F$. Viceversa, supponiamo che $F \in \Gamma'$ e che un insieme saturo $\Gamma'' \supseteq \Gamma'$ sia tale che $\Gamma'' \Vdash G$, ovvero, per ipotesi induttiva, $G \in \Gamma''$. Allora, poiché $F \in \Gamma''$ e $F, G \rhd H$, $\Gamma'' \rhd H$ e, per saturazione, $H \in \Gamma''$. Dunque $\Gamma'' \Vdash H$ per ipotesi induttiva e, risultando soddisfatta la condizione Kr4), si può concludere, quindi, che $\Gamma' \Vdash F$;

- se F è della forma $\exists x G(x)$, allora $\Gamma' \Vdash F$ se e solo se esiste $c \in D(\Gamma')$ tale che $\Gamma' \Vdash G(c)$. Per ipotesi induttiva, questo accade se e solo se $G(c) \in \Gamma'$. Per la C_n^*-saturazione di Γ', se e solo se $\Gamma' \rhd F$ e, dunque, se e solo se $F \in \Gamma'$.

- sia F della forma $\forall x G(x)$. Proviamo che se $\Gamma' \Vdash F$, allora $\Gamma' \rhd F$. Se così non fosse, per ogni costante $c \in C_{n+1}$, $\Gamma' \not\rhd G(c)$, altrimenti, non essendo c una costante del linguaggio di Γ', Γ' proverebbe $\forall x G(x)$. Esiste dunque per il Lemma 2.4 un insieme di formule Γ'' C_{n+1}^*-saturo che estende Γ' e tale che, fissata una costante $c \in C_{n+1}$, $\Gamma'' \not\rhd G(c)$. Allora, visto che $D(\Gamma'') = C_{n+1}^*$ e $c \in C_{n+1}^*$, $\Gamma'' \nVdash \forall x G(x)$. Viceversa, se $F \in \Gamma'$, allora per ogni $\Gamma'' \supseteq \Gamma'$ saturo, $F \in \Gamma''$. In particolare, per ogni $c \in D(\Gamma'')$, $\Gamma'' \rhd G(c)$, visto che $F \rhd G(c)$, e quindi $\Gamma' \Vdash F$ per Kr8).

$\square$

Dimostrazione. [16] (Teorema 2.3) Supponiamo che $G_1, \dots, G_n \not\triangleright F$ e inoltre che tali formule siano enunciati. Non è limitativo assumere ciò, in quanto se le variabili che occorrono nelle formule considerate sono comprese tra $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$, per ogni scelta di costanti $\vec{c} = c_1, \dots, c_n$ che non compaiono in $G_1, \dots, G_n$ e F, si ha

$$G_1, \dots, G_n \triangleright F \text{ se e solo se } G_1\{\vec{x}/\vec{c}\}, \dots, G_n\{\vec{x}/\vec{c}\} \triangleright F\{\vec{x}/\vec{c}\}$$
$$G_1, \dots, G_n \vDash F \text{ se e solo se } G_1\{\vec{x}/\vec{c}\}, \dots, G_n\{\vec{x}/\vec{c}\} \vDash F\{\vec{x}/\vec{c}\},$$

dove con $\{\vec{x}/\vec{c}\}$ è indicata la sostituzione simultanea di $x_1, \dots, x_n$ con $c_1, \dots, c_n$ rispettivamente. Consideriamo un insieme C di costanti non appartenenti al linguaggio delle formule coinvolte e sia Γ l'estensione C-satura dell'insieme $\{G_1 \dots, G_n\}$ tale che $\Gamma \not\triangleright F$. Costruiamo il modello canonico $\mathcal{K}_c$ e notiamo che per il Lemma 2.5, $\mathcal{K}_c \vDash G_1, \dots G_n$ in quanto tali formule sono elementi di Γ e quindi di ogni altro nodo Γ'. Tuttavia, $\mathcal{K}_c \not\vDash F$, visto che $\Gamma \not\triangleright F$, quindi $F \notin \Gamma$ e, per il Lemma 2.5 $\Gamma \not\Vdash F$. □

Corollario 2.6 (Adeguatezza)**.** *Siano $G_1, \dots, G_n, F$ formule. $G_1, \dots, G_n \triangleright F$ se e solo se $G_1, \dots, G_n \vDash F$*

Dimostrazione. Il corollario segue dai Teoremi 2.2 e 2.3. □

Dalla dimostrazione del Teorema 2.3, visto che il modello canonico costruito $\mathcal{K}_c = (K, \leq, D, \Vdash)$ è tale che $(K, \leq)$ è un albero, segue che la logica intuizionistica è completa per la semantica di Kripke, ristretta alla classe dei modelli che sono alberi.

Concludiamo la sezione con un risultato importante nella teoria dei modelli. Il Teorema 2.7 afferma che la logica intuizionistica proposizionale ha la proprietà dei modelli finiti: se una formula F non è deducibile, esiste allora un modello finito che non la soddisfa. Tale caratteristica oltre ad essere importante in sé, visto che da questa si può dimostrare facilmente la decidibilità della logica in questione, verrà usata nel seguito e pertanto verrà dimostrata nel dettaglio.

Teorema 2.7. *Sia $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ un modello di Kripke, dove $(K, \leq)$ è un albero con radice k_0. Sia F una formula non soddisfatta da $\mathcal{K}$. Esiste allora un modello $\mathcal{K}^* = (K^*, \leq^*, \Vdash^*)$ tale che:*

- *K^* è un sottoinsieme finito di K;*

[16] La dimostrazione fornita non può essere considerata valida dal punto di vista intuizionistico. Infatti il ragionamento metateorico che sottosta alle prove degli enunciati precedenti è classico. Ciò si manifesta principalmente nella dimostrazione del Teorema 2.3 stesso che si basa sulla contronominale classica.

- *$\leq^*$ è la restrizione di $\leq$ a K^*;*
- *per ogni nodo $k \in K^*$ e per ogni G sottoformula di F, si ha*

$$k \Vdash G \text{ se e solo se } k \Vdash^* G.$$

Dimostrazione. Osserviamo che come si esprime il modello $\mathcal{K}$ sulla formula F dipende unicamente da come si esprimono i vari nodi di K sulle sottoformule di F. Sia S_F l'insieme delle sottoformule di F e per ogni nodo $k \in K$, sia $S(k)$ l'insieme delle formule in S_F forzate dal nodo k.

Cerchiamo ora di costruire, a partire da $\mathcal{K}$, un modello che si comporta come questo sulle sottoformule di F. Per farlo ragioneremo per ricorsione. Fissiamo $K_0 = \emptyset$ e $K_1 = \{k_0\}$. Supponendo di aver costruito K_n e K_{n+1}, individuiamo i nodi che faranno parte di K_{n+2}. Per $k \in K_{n+1} \setminus K_n$ esiste un sottoinsieme massimale per inclusione $\{t_{k,0}, \dots, t_{k,n(k)}\}$ di K tale che, per ogni $i, j \leq n(k)$ con $i \neq j$:

a) $t_{k,i}$ è successore di k;

b) l'insieme delle sottoformule di F forzate da k e quello delle sottoformule di F forzate da $t_{k,i}$ sono diversi, ovvero $S(k) \neq S(t_{k,i})$;

c) l'insieme delle sottoformule di F forzate da $t_{k,i}$ e quello delle sottoformule forzate da $t_{k,j}$ sono diversi, ovvero $S(t_{k,i}) \neq S(t_{k,j})$.

Affinché quanto definito precedentemente abbia senso, dobbiamo osservare innanzitutto che dato k l'insieme I_k dei sottoinsiemi di K che soddisfano a), b) e c) è costituito solo da insiemi finiti. Un insieme infinito di nodi, infatti, non può soddisfare c), vista la finitezza di S_F e quindi del suo insieme delle parti. In realtà la cardinalità di S_F fornisce anche un limite superiore alla cardinalità degli elementi di I_k e ciò garantisce l'esistenza di un insieme massimale per l'inclusione.

Poniamo ora $K_{n+2} = K_{n+1} \cup \bigcup\{(t_{k,0}, \dots, t_{k,n(k)}) : k \in K_{n+1} \setminus K_n\}$. Notiamo che se $k' \in K_{n+2} \setminus K_{n+1}$ allora esiste un $k \in K_{n+1} \setminus K_n$ ed un $i \leq n(k)$ tale che $k' = t_{k,i}$. Pertanto $S(k') \neq S(k)$ e, in quanto $k < k'$, si ha che $S(k) \subset S(k')$. Essendo S_F finito, tale ragionamento implica che per n sufficientemente grande $K_n = K_{n+1}$. Dunque $K^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ è un albero finito.

Definiamo il modello $\mathcal{K}^* = (K^*, \leq^*, \Vdash^*)$ dotando K^* dell'ordine $\leq^*$, restrizione di $\leq$ all'insieme considerato, e $\Vdash^*$ in modo tale che per ogni $k \in K^*$ e per ogni formula atomica A, valga

$$k \Vdash A \text{ se e solo se } k \Vdash^* A. \tag{1}$$

Dimostriamo ora che la (1) vale anche nel caso in cui A è una generica sottoformula G di F. Procediamo per induzione sull'altezza della formula:

- se G è atomica, l'asserzione è dimostrata per (1);
- sia $G = G_1 \wedge G_2$ e $k \in K^*$. Notiamo che $k \Vdash^* G$ se e solo se $k \Vdash^* G_1$ e $k \Vdash^* G_2$. Per ipotesi induttiva, questo equivale a dire che $k \Vdash G_1$ e $k \Vdash G_2$, ovvero che $k \Vdash G$;
- sia $G = G_1 \vee G_2$ e $k \in K^*$. In analogia col caso precedente, $k \Vdash^* G$ se e solo se $k \Vdash^* G_1$ o $k \Vdash^* G_2$. Per ipotesi induttiva, questo equivale a dire che $k \Vdash G_1$ o $k \Vdash G_2$, ovvero che $k \Vdash G$;
- sia $G = \neg G_1$ e sia $k \in K^*$. Se $k \Vdash \neg G$, allora per ogni $j \geq k$, $j \nVdash G$. Sia $i \in K^*$ un successore generico di k. Per ipotesi induttiva, visto che $i \geq k$ e quindi $i \nVdash G$, abbiamo che $i \nVdash^* G$, da cui $k \Vdash^* \neg G$.

  Viceversa, supponiamo che $k \nVdash \neg G$. Allora esiste $j \geq k$ tale che $j \Vdash G$. Se $G \in S(k)$, abbiamo concluso perché, per ipotesi induttiva, $k \Vdash^* G$ e dunque $k \nVdash^* \neg G$. Se, invece, $G \notin S(k)$, allora $\{j\} \in I_k$ e dunque la costruzione sopra descritta prevede che ci siano dei nodi successivi a k. Sia $\{t_{k,0}, \ldots, t_{k,n(k)}\}$ l'insieme massimale in I_k, i cui elementi compariranno in K^*. Supponiamo che ogni nodo $t_{k,i}$ di tale insieme sia tale che $t_{k,i} \nVdash^* G$ e consideriamo l'insieme $B = \{t_{k,0}, \ldots, t_{k,n(k)}, j\}$. Questo verifica le condizioni a), b) visto che $G \in S(j)$ mentre $G \notin S(k)$ e c) dato che $G \in S(j)$ mentre, per ipotesi induttiva, poiché ogni $t_{k,i} \nVdash^* G$, $G \notin S(t_{k,i})$. L'esistenza dell'insieme B violerebbe la massimalità dell'insieme di partenza e quindi bisogna ammettere che esista un $i \leq n(k)$ tale che $t_{k,i} \Vdash^* G$, da cui $k \nVdash^* \neg G$;
- sia $G = G_1 \to G_2$ e sia $k \in K^*$. Se $k \Vdash G_1 \to G_2$, allora per ogni $j \geq k$, $j \nVdash G_1$ o $j \Vdash G_2$. Considerando un generico i successore di k in K^*, per ipotesi induttiva $i \nVdash^* G_1$ o $i \Vdash^* G_2$ e dunque $k \Vdash^* G_1 \to G_2$.

  Viceversa, se $k \nVdash G$, esiste $j \geq k$ tale che $j \Vdash G_1$ ma $j \nVdash G_2$. Se $G_1 \in S(k)$, si conclude subito visto che $G_2 \notin S(k)$ e per ipotesi induttiva $k \Vdash^* G_1$ ma $k \nVdash^* G_2$, da cui $k \nVdash^* G$. Se, invece, $G_1 \notin S(k)$, allora $\{j\} \in I_k$ e dunque la costruzione sopra descritta prevede che ci siano dei nodi successivi a k. Sia $\{t_{k,0}, \ldots, t_{k,n(k)}\}$ l'insieme massimale in I_k, i cui elementi compariranno in K^*. Supponiamo che ogni nodo $t_{k,i}$ di tale insieme sia tale che $t_{k,i} \Vdash^* G$ e consideriamo l'insieme $B = \{t_{k,0}, \ldots, t_{k,n(k)}, j\}$. Questo verifica le condizioni a), b) visto che $G_1 \notin S(k)$ mentre $G_1 \in S(j)$ e c) dato che $G \notin S(j)$ mentre, per ipotesi induttiva, poiché ogni $t_{k,i} \Vdash^* G$, $G \in S(t_{k,i})$. L'esistenza dell'insieme

B violerebbe la massimalità dell'insieme di partenza e quindi bisogna ammettere che esista un $i \leq n(k)$ tale che $t_{k,i} \nVdash^* G$, da cui $k \nVdash^* G$.

Concludiamo la dimostrazione osservando quindi che il ragionamento sopra permette di generalizzare la (1) e pertanto, considerata la radice $k_0 \in K^*$, si ha che $k_0 \Vdash F$ se e solo se $k_0 \Vdash^* F$. In particolare poiché $\mathcal{K} \nvDash F$, $k_0 \nVdash F$ e dunque $k_0 \nVdash^* F$, da cui la tesi.

$\square$

Il Teorema 2.7 non può essere generalizzato alla logica intuizionistica al prim'ordine. Vale, infatti, la seguente proprietà che afferma la validità in ogni modello finito della *double negation shift*, ovvero della formula $(\forall x \neg\neg F) \rightarrow (\neg\neg\forall x F)$.

Proprietà 2.8. *Sia $\mathcal{K} = (K, \leq, D, \Vdash)$ un modello di Kripke con $(K, \leq)$ un albero finito. Allora per ogni formula F con variabile libera x, $\mathcal{K} \vDash (\forall x \neg\neg F) \rightarrow (\neg\neg\forall x F)$.*

Dimostrazione. Sia k_0 la radice di $(K, \leq)$ e supponiamo che un nodo $k_0 \Vdash \forall x \neg\neg F$. Allora per ogni $j \geq k_0$ e per ogni elemento $d \in D(j)$, $j \Vdash \neg\neg F(d)$. In particolare, visto che l'albero è finito, esso possiede foglie e ogni foglia f è tale che $f \Vdash \neg\neg F(d)$ per ogni elemento $d \in D(f)$. Da Kr7) segue, quindi, che $f \Vdash F(d)$ e, data l'arbitrarietà di $d \in D(f)$, $f \Vdash \forall x F$. Usando ancora Kr7), si osserva che questo implica che $k_0 \Vdash \neg\neg\forall x F$, da cui la tesi. $\square$

3 Interpretazione alternativa della semantica di Kripke

3.1 Semantica delle valutazioni per la logica intuizionistica

Uno dei modi più naturali che si possiedono per creare una semantica è quello di procedere per tavole di verità. Come sarà chiaro nel seguito, adotteremo l'approccio "bottom-up" presentato in [Par12] e che può essere riassunto nella seguente considerazione dell'autore: "quando ci viene richiesto di spiegare perché, ad esempio, A non segue da $A \to B$ e da B, uno di solito fornisce esempi [...], come assumere che A sia 'la macchina ha il serbatoio vuoto' e B 'la macchina si ferma', dove [...] se A è vera allora anche B lo è, ma se B è vera non necessariamente A lo deve essere. Questo naturalmente porta all'idea di una valutazione degli atomi proposizionali delle proposizioni che stiamo studiando che contempli almeno due valori. Il nostro scopo di mostrare che F non segue da $G_1, \ldots, G_n$ è raggiunto se viene trovato un metodo per calcolare i valori per formule composte in modo tale che uno specifico valore, diciamo $\mathbf{t}$, è preservato dalle deduzioni e se viene trovata una valutazione v degli atomi proposizionali di $G_1, \ldots, G_n, F$ tale che $G_1, \ldots, G_n$ assumono il valore $\mathbf{t}$, mentre F no".

Dunque lo scopo che motiva l'approccio seguito è, in un primo momento, quello di provare che non sussiste la relazione di deducibilità tra determinate formule. Nel seguito indichiamo con $\mathbf{v}$ quello che nel discorso precedente è stato denotato con $\mathbf{t}$, ovvero il valore che si trasmette dalle assunzioni alle conclusione di una deduzione. Notiamo che questo significa dire che se F è deducibile senza assunzioni attive, vorremmo che le sia attribuito il valore $\mathbf{v}$. Osserviamo inoltre che se $\mathbf{v}$ fosse l'unico valore di verità disponibile, la semantica creata avrebbe poco senso di esistere non permettendo una distinzione delle varie formule: abbiamo quindi bisogno di almeno un altro valore, che denoteremo con $\mathbf{f}$. Visto che vogliamo evitare il caso in cui il valore di verità di ogni formula sia $\mathbf{v}$, a causa della regola *ex falso quodlibet* e della trasmissione tramite le regole deduttive di $\mathbf{v}$, $\perp$ dovrà sempre essere valutato $\mathbf{f}$. Affidandosi a queste idee, sfruttando la vero-funzionalità[17] della semantica e considerando come valori di verità possibili solo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{f}$, si sviluppano in

[17]Per vero-funzionalità di una semantica intendiamo che il valore di verità assunto da una formula complessa $F \circ G$ (dove $\circ$ è un qualsiasi operatore proposizionale) dipenda *unicamente* dai valori di verità assunti da F e da G. Analogamente, il valore di verità assunto da $\neg F$ dipende *unicamente* da quello assunto da F.

maniera naturale le tavole di verità per S_2, la semantica delle valutazioni classica. [18]

Avendo due soli valori di verità a disposizione, dunque, non si ottiene una semantica vero-funzionale adeguata per la logica intuizionistica. In realtà il problema si presenta anche con un numero finito qualsiasi di valori di verità, come dimostrato nel 1932 da Gödel con l'introduzione delle semantiche S_n in [Göd32]. Queste risultano uno strumento utile per lo studio della logica intuizionistica e, in generale, di alcune logiche non classiche. Gödel presenta le tavole di verità per tali semantiche senza argomentare nel dettaglio il perché di varie scelte, cosa che, invece, faremo nel seguito almeno per la semantica con tre valori di verità, denotata con S_3. Seguiremo l'approccio in [Par20.b].

Volendo allargare il numero di valori di verità a tre, introduciamo anche un altro simbolo che, in omaggio a Gödel, denotiamo con **g**. Anche in questo caso, vorremmo che il valore **v** si trasmetta dalle assunzioni alla conclusione, questa volta però in ambito intuizionistico. Preservando le acquisizioni fatte nella semantica classica, rimane da capire, al fine di costruire delle tavole di verità per S_3, come si comporta il valore **g** in funzione degli operatori proposizionali.

L'introduzione di un terzo valore permette, a priori, una distinzione tra $\neg\neg F$ e F. Vorremmo quindi che ci sia almeno un caso in cui F non sia valutata **v**, mentre $\neg\neg F$ lo sia. Poiché se F fosse **v** o **f**, questo caso sarebbe escluso, questa considerazione ci permette di determinare il valore di $\neg F$ nel caso in cui F sia valutata **g**: se $\neg F$ fosse **v**, allora $\neg\neg F$ sarebbe **f**; se $\neg F$ fosse **g**, allora per vero-funzionalità anche $\neg\neg F$ sarebbe **g**. In entrambi i casi non si verifica la circostanza voluta e dunque bisogna concludere che $\neg F$ deve essere valutata **f**. Così facendo, infatti, $\neg\neg F$ sarebbe **v**.

F	$\neg F$
v	**f**
g	**f**
f	**v**

Tabella 1: Tavole di verità per la negazione

Per discutere la congiunzione bisogna considerare i seguenti casi:

[18] Come mostrato in [Par12], in realtà la quasi totalità del ragionamento che porta alla creazione delle tavole di verità classiche è condotto in conformità con la sola logica intuizionistica. La vero-funzionalità e la scelta di soli due valori di verità motivano l'unica legge non derivabile in questo modo, ovvero che la negazione di una formula valutata **f**, deve assumere il valore **v**.

- siano F e G valutate rispettivamente **v** e **g**. Se $F \wedge G$ fosse **v**, allora visto che $F \wedge G \triangleright_p G$, G dovrebbe essere valutata **v**, per la trasmissione di **v**; se $F \wedge G$ fosse **f**, $\neg(F \wedge G)$ sarebbe **v** e visto che $\neg(F \wedge G), F \triangleright_p \neg G$ (Deduzione 2, Appendice A), $\neg G$ dovrebbe essere valutata **v**, cosa che però non accade in quanto G è valutata **g**. Dunque $F \wedge G$ deve assumere il valore **g**;

- siano F e G valutate rispettivamente **g** e **v**. Ragionamenti analoghi a quelli del punto precedente mostrano che $F \wedge G$ deve essere valutata **g**;

- siano F e G valutate rispettivamente **g** e **g**. Se $F \wedge G$ fosse valutata **v**, allora anche F lo dovrebbe essere visto che $F \wedge G \triangleright_p F$; se $F \wedge G$ fosse valutata **f**, $\neg(F \wedge G)$ sarebbe **v** e, per ipotesi, anche $\neg\neg F$ sarebbe **v**. Poiché $\neg(F \wedge G), \neg\neg F \triangleright_p \neg G$ (Deduzione 3, Appendice A), $\neg G$ dovrebbe essere valutata **v**, impossibile nel caso in cui G assume il valore **g**. Dunque $F \wedge G$ assume il valore **g**;

- siano F e G valutate rispettivamente **g** e **f**. Visto che $\neg G \triangleright_p \neg(F \wedge G)$ (Deduzione 4, Appendice A), $\neg(F \wedge G)$ deve essere valutata **v** e dunque $F \wedge G$ deve assumere il valore **f**;

- siano F e G valutate rispettivamente **f** e **g**. Ragionamenti analoghi a quelli del punto precedente mostrano che $F \wedge G$ deve assumere il valore **f**.

F	G	$F \wedge G$
v	**v**	**v**
v	**g**	**g**
v	**f**	**f**
g	**v**	**g**
g	**g**	**g**
g	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**g**	**f**
f	**f**	**f**

Tabella 2: Tavole di verità per la congiunzione

Trattiamo ora il caso della disgiunzione:

- siano F e G valutate rispettivamente **v** e **g**. Visto che $F \triangleright_p F \vee G$, $F \vee G$ deve essere valutata **v**;

- siano F e G valutate rispettivamente **g** e **v**. Visto che $G \rhd_p F \vee G$, $F \vee G$ deve essere valutata **v**;

- siano F e G valutate rispettivamente **g** e **g**. $F \vee G$ non può assumere il valore **f**, visto che $\neg(F \vee G), \neg\neg F \rhd_p \perp$ (Deduzione 7, Appendice A) e dunque $\perp$ dovrebbe assumere il valore **v**. Esiste, in aggiunta, un caso particolare, ad esempio se F e G coincidono, per cui $F \vee G \rhd_p F$. In tal caso $F \vee G$ non può assumere il valore **v**, altrimenti anche F dovrebbe assumere tale valore, e dunque in questa circostanza, $F \vee G$ deve essere valutata **g**. Per la vero-funzionalità dunque, dobbiamo concludere che, in ogni caso, $F \vee G$ deve essere valutata **g**;

- siano F e G valutate rispettivamente **g** e **f**. $F \vee G$ non può essere valutata **v**, visto che $F \vee G, \neg G \rhd_p F$ (Deduzione 6, Appendice A), dunque F dovrebbe essere valutata **v**, contro l'ipotesi; $F \vee G$ non può essere valutata **f**, perché $\neg(F \vee G)$ sarebbe **v** e, visto che $\neg(F \vee G), \neg\neg F \rhd_p \perp$ (Deduzione 7, Appendice A), $\perp$ dovrebbe assumere **v**. Dunque $F \vee G$ deve essere valutata **g**;

- siano F e G valutate rispettivamente **f** e **g**. Ragionamenti analoghi a quelli del punto precedente mostrano che $F \vee G$ deve essere valutata **g**.

F	G	$F \vee G$
v	**v**	**v**
v	**g**	**v**
v	**f**	**v**
g	**v**	**v**
g	**g**	**g**
g	**f**	**g**
f	**v**	**v**
f	**g**	**g**
f	**f**	**f**

Tabella 3: Tavole di verità per la disgiunzione

Concludiamo con le tavole di verità dell'implicazione, tramite le quali, grazie a quella della congiunzione, riusciamo a fornire le tavole di verità per l'equivalenza:

- siano F e G valutate rispettivamente **v** e **g**. Se $F \to G$ fosse **v**, visto che $F, F \to G \rhd_p G$, G dovrebbe assumere il valore **v**, contro l'ipotesi; se

$F \to G$ fosse $\mathbf{f}$, allora $\neg(F \to G)$ sarebbe $\mathbf{v}$ e, visto che $\neg(F \to G) \rhd_p \neg G$ (Deduzione 8, Appendice A), $\neg G$ dovrebbe assumere il valore $\mathbf{v}$, contro l'ipotesi. Dunque $F \to G$ deve essere valutata $\mathbf{g}$;

- siano F e G valutate rispettivamente $\mathbf{g}$ e $\mathbf{v}$. Visto che $G \rhd_p F \to G$, $F \to G$ deve essere valutata $\mathbf{v}$;

- siano F e G valutate rispettivamente $\mathbf{g}$ e $\mathbf{g}$. Esiste un caso particolare, ad esempio in cui F e G coincidono, per cui $\rhd_p F \to G$, dunque, per vero-funzionalità, $F \to G$ deve assumere il valore $\mathbf{v}$;

- siano F e G valutate rispettivamente $\mathbf{g}$ e $\mathbf{f}$. Se $F \to G$ fosse $\mathbf{v}$, visto che $F \to G, \neg G \rhd_p \neg F$ (Deduzione 9, Appendice A), $\neg F$ dovrebbe essere valutata $\mathbf{v}$, contro l'ipotesi. Se $F \to G$ fosse $\mathbf{g}$, $\neg\neg(F \to G)$ sarebbe $\mathbf{v}$ e, visto che $\neg\neg F, \neg\neg(F \to G) \rhd_p \neg\neg G$ (Deduzione 11, Appendice A), $\neg\neg G$ dovrebbe assumere il valore $\mathbf{v}$, contro l'ipotesi. Dunque $F \to G$ deve essere valutata $\mathbf{f}$;

- siano F e G valutate rispettivamente $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$: visto che $\neg F \rhd_p F \to G$ (Deduzione 10, Appendice A), $F \to G$ deve assumere il valore $\mathbf{v}$.

F	G	$F \to G$
v	**v**	**v**
v	**g**	**g**
v	**f**	**f**
g	**v**	**v**
g	**g**	**v**
g	**f**	**f**
f	**v**	**v**
f	**g**	**v**
f	**f**	**v**

Tabella 4: Tavole di verità per l'implicazione

In accordo con quanto viene fatto classicamente, definiamo una valutazione come una funzione v che ad ogni formula associa un valore in $V_3 = \{\mathbf{v}, \mathbf{g}, \mathbf{f}\}$ che segue le regole imposte dalle tavole di verità sopra presentate, con la proprietà che $v(\perp) = \mathbf{f}$.

Osserviamo che può essere data una descrizione più agevole delle tavole di verità imponendo la seguente relazione d'ordine stretto $<$ (e l'associata

F	G	$F \equiv G$
v	**v**	**v**
v	**g**	**g**
v	**f**	**f**
g	**v**	**g**
g	**g**	**v**
g	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**g**	**f**
f	**f**	**v**

Tabella 5: Tavole di verità per l'equivalenza

relazione di ordine largo $\leq$) in V_3:

$$\mathbf{f} < \mathbf{g} < \mathbf{v}.$$

Così facendo, le osservazioni fatte precedentemente si riducono a:

$$v(\neg F) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se } v(F) = \mathbf{f}; \\ \mathbf{f} & \text{altrimenti}; \end{cases} \tag{2}$$

$$v(F \wedge G) = \min\{v(F), v(G)\}; \tag{3}$$

$$v(F \vee G) = \max\{v(F), v(G)\}; \tag{4}$$

$$v(F \to G) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se } v(F) \leq v(G); \\ v(G) & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{5}$$

Equivalentemente alla definizione data precedentemente di valutazione, questa può essere definita come una funzione v dall'insieme delle formule in V_3, tale che valgano le condizioni (2)-(5) e $v(\perp) = \mathbf{f}$. Si ottiene in questa maniera la semantica S_3: rispetto a questa semantica (e alle semantiche S_n che presenteremo di seguito) una formula F è detta *soddisfacibile* se esiste una valutazione v che la *soddisfa*, ovvero tale che $v(F) = \mathbf{v}$; è detta *insoddisfacibile* se non è soddisfacibile; è detta *tautologia* o *valida* se ogni valutazione la soddisfa.

Le condizioni (2)-(5) possono essere generalizzate, portando alle semantiche S_n. Fissato $n \in \mathbb{N}$, definiamo $V_n = \{\mathbf{f}, \mathbf{g_1}, \ldots, \mathbf{g_{n-2}}, \mathbf{v}\}$ l'insieme dei valori di verità e lo dotiamo della relazione d'ordine stretto $<$ tale che

$$\mathbf{f} < \mathbf{g_1} < \cdots < \mathbf{g_{n-2}} < \mathbf{v}.$$

Una valutazione di S_n sarà una funzione v che ad ogni formula associa un valore in V_n, tale che $v(\bot) = \mathbf{f}$ e che soddisfa le proprietà (2)-(5). Anche qui, come nel caso di S_3, indichiamo con $\leq$ la relazione d'ordine largo associata a $<$: $\mathbf{t_1} \leq \mathbf{t_2}$ se e solo se $\mathbf{t_1} < \mathbf{t_2}$ oppure $\mathbf{t_1} = \mathbf{t_2}$.

Non è sorprendente ora, almeno per la semantica S_3, il seguente teorema di correttezza che essenzialmente afferma che lo scopo da cui siamo partiti è stato raggiunto.

Teorema 3.1. *Sia $n \geq 2$ un numero naturale. Per ogni valutazione v della semantica S_n si ha:*

a) se $G_1, \ldots, G_m \rhd_p F$, allora $\min\{v(G_1), \ldots, v(G_m)\} \leq v(F)$;

b) se $G_1, \ldots, G_m \rhd_p F$ e $v(G_1) = \cdots = v(G_m) = \mathbf{v}$, allora $v(F) = \mathbf{v}$;

c) se $\rhd_p F$, allora $v(F) = \mathbf{v}$.

Dimostrazione. I punti b) e c) seguono facilmente da a) e quest'ultima si può dimostrare procedendo per induzione sull'altezza della deduzione. Vediamo alcuni esempi:

- supponiamo che l'ultima regola della deduzione sia l'introduzione del $\wedge$, ovvero $F = F_1 \wedge F_2$ e si hanno le deduzioni $G_1, \ldots, G_m \rhd_p F_1$ e $G_1, \ldots, G_m \rhd_p F_2$. Per ipotesi induttiva

$$\min\{v(G_1), \ldots, v(G_m)\} \leq v(F_1);$$
$$\min\{v(G_1), \ldots, v(G_m)\} \leq v(F_2).$$

  Segue dunque che

$$\min\{v(G_1), \ldots, v(G_m)\} \leq \min\{v(F_1), v(F_2)\},$$

  ovvero per (3)

$$\min\{v(G_1), \ldots, v(G_m)\} \leq v(F_1 \wedge F_2).$$

- sia $F = \neg H$ e supponiamo che l'ultima regola della deduzione sia l'introduzione del $\neg$, ovvero si ha la deduzione $G_1, \ldots, G_m, H \rhd_p \bot$. Per ipotesi induttiva

$$\min\{v(G_1), \ldots, v(G_m), v(H)\} \leq v(\bot) = \mathbf{f},$$

  dunque uno tra $v(G_1), \ldots, v(G_m), v(H)$ deve essere $\mathbf{f}$. Se $v(H) = \mathbf{f}$, allota $v(F) = v(\neg H) = \mathbf{v}$, per (2); altrimenti $v(F) = \mathbf{f}$ e per un certo $i \leq m$ si ha $v(G_i) = \mathbf{f}$. In entrambi i casi segue la tesi.

- sia $F = F_1 \to F_2$ e supponiamo che l'ultima regola sia l'introduzione del $\to$, ovvero si ha la deduzione $G_1, \ldots, G_m, F_1 \rhd_p F_2$. Per ipotesi induttiva
$$\min\{v(G_1), \ldots, v(G_m), v(F_1)\} \leq v(F_2).$$
Se $v(F_1) \leq v(F_2)$, allora per (5) $v(F) = \mathbf{v}$; se $v(F_1) > v(F_2)$, allora, per la disequazione sopra, esiste $i \leq m$ tale che $v(G_i) \leq v(F_2)$. In entrambi i casi si ha la tesi.

$\square$

Come corollario del Teorema 3.1, seguono dei risultati di non deducibilità intuizionistica di alcune formule classicamente deducibili:

- sia A un atomo proposizionale e sia v una valutazione in S_3 tale che $v(A) = \mathbf{g}$. Allora $v(\neg\neg A) = \mathbf{v}$ e dunque per il Teorema 3.1, si ha $\neg\neg A \not\rhd_p A$;

- sia A un atomo proposizionale e sia v la stessa valutazione del punto precedente. Allora $v(\neg A) = \mathbf{f}$ e $v(A \vee \neg A) = \mathbf{g}$. Per il Teorema 3.1, $\not\rhd_p A \vee \neg A$;

Osserviamo che la logica intuizionistica non è completa per nessuna semantica S_n: questo può essere facilmente visto notando che se A e B sono atomi proposizionali, la formula di pre-linearità $(A \to B) \vee (B \to A)$, sebbene non deducibile intuizionisticamente, è una tautologia, dato che $v(A) \leq v(B)$ oppure $v(B) \leq v(A)$. [19] Quanto detto, dietro considerazioni sintattiche che escludono la deducibilità di tale formula, ad esempio la proprietà della disgiunzione, basterebbe per dimostrare il successivo Teorema 3.2. Preferiamo comunque riportare di seguito la dimostrazione originale di Gödel, che fa uso esclusivamente del Teorema 3.1.

Teorema 3.2. *Per nessun $n \in \mathbb{N}$, la logica intuizionistica risulta completa per la semantica S_n.*

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e siano $A_1, \ldots, A_n$ degli atomi proposizionali. Consideriamo la formula
$$F_n := \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (A_i \equiv A_j).$$

[19]La scelta della formula di pre-linearità come controesempio alla adeguatezza di S_n non è casuale. Denotando, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con L_n l'insieme delle tautologie di S_n, si può dimostrare che se $n < m$, $L_n \supset L_m$ e ogni L_n contiene le formule del tipo in questione. Tali semantiche dunque individuano delle logiche intermedie tra quella classica e quella intuizionistica. Chiamando $L_\omega := \cap_{n \in \mathbb{N}} L_n$, si ha che $F \in L_\omega$ se e solo se $\Gamma \rhd_p F$, dove Γ è l'insieme delle formule del tipo $(H \to G) \vee (G \to H)$.

Poiché per ogni $m \in \mathbb{N}$ ogni valutazione v soddisfa le proprietà (3) e (5), deve accadere che

$$v(F \equiv G) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{se e solo se } v(F) = v(G), \\ \min\{v(F), v(G)\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per il principio dei cassetti segue che per $m < n$, la semantica S_m riconosce F_n come tautologia, mentre, se $m \geq n$, F_n è soddisfacibile in S_m, ma non valida. Per osservare quest'ultimo fatto basta considerare una valutazione v per cui se $i \neq j$, si ha $v(A_i) \neq v(A_j)$. In tal caso, fissati due indici distinti i, j, $v(A_i \equiv A_j) \neq \mathbf{v}$ e, in particolare, $v(F_n) \neq \mathbf{v}$. Pertanto, dal Teorema 3.1 segue che $\not\rhd_p F_n$ e dunque che per ogni n c'è almeno una tautologia di S_n (F_{n+1}) non deducibile intuizionisticamente. Questo dimostra la tesi. □

Il risultato precedentemente può essere generalizzato per una qualsiasi semantica vero-funzionale con n valori di verità.

Teorema 3.3. *Nessuna semantica vero-funzionale con un numero finito di valori di verità è adeguata per la logica intuizionistica.*

Dimostrazione. [20] Consideriamo una semantica $\mathcal{S}$ con n valori di verità e supponiamo che $\mathcal{S}$ sia adeguata per la logica intuizionistica. Denotiamo con $\mathbf{v}$ il valore che si trasmette nelle regole deduttive dalle assunzioni alle conclusioni (o, equivalentemente, il valore attribuito ad ogni formula deducibile) e con $\mathbf{f}$ il valore assunto da $\perp$ (un tale valore deve essere diverso da $\mathbf{v}$, altrimenti per la regola *ex falso quodlibet*, ogni formula sarebbe una tautologia). Dalla vero-funzionalità discende che:

- se F viene valutata $\mathbf{v}$, allora $F \vee G$ deve anch'essa assumere il valore $\mathbf{v}$, visto che $F \rhd_p F \vee G$.

- se F e G sono due formule che assumono lo stesso valore di verità, allora $F \equiv G$ deve assumere il valore $\mathbf{v}$. Ciò segue dalla vero-funzionalità della semantica in questione e dal fatto che esiste un caso particolare, ad esempio se F coincide con G, per cui $\rhd_p F \equiv G$ e dunque tale formula deve essere valutata $\mathbf{v}$;

Da queste considerazioni e dal principio dei cassetti, segue che, in $\mathcal{S}$, F_{n+1} è una tautologia. Poiché abbiamo supposto che la logica intuizionistica sia

[20] Notiamo che nella dimostrazione seguita non si farà menzione alla proprietà della disgiunzione, sebbene, per provare il risultato, si possa passare anche per tale caratteristica della logica intuizionistica. Abbiamo preferito riportare il ragionamento originario presente in [Göd32].

completa per la semantica in questione, tale formula è deducibile. Abbiamo già mostrato, però, che questo non è possibile, visto che, considerando $m > n$, la formula non risulta valida in S_m e pertanto non deducibile per il Teorema 3.1. Da questo segue l'assurdo e quindi la tesi. $\square$

Il Teorema 3.3 costituisce un forte limite riguardo alle strade che si possono seguire per creare una semantica per la logica intuizionistica. Nel 1936 S. Jaśkowski, in [Jas36], propose una semantica, basata sempre sull'idea delle valutazioni, però, con un numero infinito di valori di verità. Sebbene tale semantica risulti adeguata per la logica intuizionistica, questa non sembra avere una chiara interpretazione intuitiva. Un altro approccio degno di essere menzionato è quello di A. Tarski e J.C.C. McKinsey che introdussero le semantiche topologiche e aprirono un fiorente campo di studi che negli anni '60 trovò grande sviluppo grazie a H. Rasiowa e R. Sikorski. In queste righe presenteremo soltanto dei cenni. L'idea di fondo è quella di associare ad ogni formula atomica diversa da $\perp$ un aperto di uno spazio topologico (X, τ) e a $\perp$ l'aperto $\emptyset$. Si estende poi una tale corrispondenza a tutte le formule del linguaggio con un procedimento induttivo: ad esempio, la congiunzione viene interpretata topologicamente come l'intersezione e la disgiunzione come l'unione. I casi dell'implicazione e della negazione sono meno banali e, in particolare, denotando con $[\![F]\!]$ l'aperto associato alla formula F, si ha che

$$[\![F \to G]\!] = \mathrm{Int}([\![F]\!]^c \cup [\![G]\!]);$$
$$[\![\neg F]\!] = \mathrm{Int}([\![F]\!]^c).$$

Ogni spazio topologico (X, τ) con una mappa $[\![-]\!]$ dalle formule agli aperti della topologia, che rispetta le regole sopra discusse, costituisce un modello: una formula F è ivi soddisfacibile se $[\![F]\!] = X$. Per una semantica costruita in questa maniera si può dimostrare la validità sia di un teorema di correttezza che di completezza. Pur non entrando nei dettagli, ci limitiamo ad osservare che in una tale semantica non vale il principio del terzo escluso. Ad esempio $(\mathbb{R}, \tau)$, dove τ è la topologia euclidea standard, non soddisfa $A \vee \neg A$ se attribuiamo ad A l'aperto $(-\infty, 0)$: infatti, $[\![\neg A]\!] = \mathrm{Int}([\![A]\!]^c) = (0, +\infty)$ e dunque $[\![A \vee \neg A]\!] = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}$.

Nel seguito cercheremo di percorrere un approccio diverso da quelli sopra proposti. Costruiremo, infatti, una semantica delle valutazioni non vero-funzionale che ci aiuterà nell'individuazione di una semantica per la logica intuizionistica. Approderemo, infatti, alla fine, alla semantica di Kripke, giustificandola con un'euristica essenzialmente basata su ragionamenti sintattico-deduttivi e diversa da quella proposta in [Kri65].

Come prima cosa, è necessario prendere nota del fatto che il concetto centrale dell'intuizionismo è quello di dimostrabilità e non di verità, come indicato nell'Introduzione dell'elaborato e più nel dettaglio in [Dum73]. Da tale considerazione segue che per una descrizione di F abbiamo bisogno di almeno tre valori di verità: 1 se dimostrabile, 0 se refutabile (ovvero è dimostrabile la sua negazione) e 1/2 se non è né dimostrabile, né refutabile. Osserviamo che:

- se F è dimostrata, $\neg F$ è refutata;
- se F è refutata, $\neg F$ è dimostrata;
- se F non è né dimostrata, né refutata, $\neg F$ non può essere dimostrata.

Analizziamo meglio quest'ultimo caso: supponendo F né dimostrata, né refutata, nulla vieta che $\neg F$ possa essere refutata. Infatti una refutazione di tale formula, in generale, non è una dimostrazione di F visto che in logica intuizionistica non è valida la legge di doppia negazione. Nel caso in cui F è valutata 1/2, quindi $\neg F$ può essere valutata sia 1/2 che 0. Da questo segue che una conoscenza adeguata di F in realtà non si ha osservando soltanto F, ma anche $\neg F$. [21] Nel seguito, diremo per comodità che "F è $1/2 - 1/2$" per dire che F non è né dimostrata, né refutata, così come $\neg F$; che "F è $1/2 - 0$" se F non è né dimostrata, né refutata, ma $\neg F$ è refutata; che "F è 1/2" se F non è 0 o 1. A volte, ancor più semplicemente, diremo "$F = 1/2 - 1/2$" per indicare che F è $1/2 - 1/2$ e, analogamente, per gli altri valori di verità.

Basandoci quindi su questi 4 valori, di cui sopra abbiamo discusso, cerchiamo di identificare delle tavole di verità. Dal discorso appena condotto segue la Tabella 6. Notiamo che per la legge di tripla negazione, valida grazie alla Deduzione 1 in Appendice A, possiamo limitarci ad analizzare formule dove compaiono al più due ripetizioni consecutive del simbolo $\neg$.

[21] In linea teorica sembrerebbe necessario interrogarsi anche su $\neg\neg F$, per un'informazione completa sulla formula iniziale. Questo, però, può essere evitato poiché

- se F è dimostrata ($F = 1 - 0$), allora $\neg\neg F$ è dimostrata;
- se F è refutata ($F = 0 - 1$), allora $\neg\neg F$ è refutata;
- se F non è né dimostrata, né refutato e $\neg F$ è refutata ($F = 1/2 - 0$), allora $\neg\neg F$ è dimostrata;
- se F non è né dimostrata, né refutata e $\neg F$ anche non è né dimostrata, né refutata ($F = 1/2 - 1/2$), allora $\neg\neg F$ non è né dimostrata (altrimenti sarebbe refutato $\neg F$), né refutata (altrimenti sarebbe dimostrato $\neg F$).

F	$\neg F$	$\neg\neg F$
$1-0$	$0-1$	$1-0$
$1/2-0$	$0-1$	$1-0$
$1/2-1/2$	$1/2-1/2$	$1/2-1/2$
$0-1$	$1-0$	$0-1$

Tabella 6: Tavola per la negazione

Per analizzare gli altri casi spieghiamo prima il principio che ci guida. Attribuire un dato valore di verità ad una formula F significa fare delle ipotesi sulla deducibilità di F, $\neg F$ e $\neg\neg F$:

- se $F = 1-0$, stiamo supponendo che F (e $\neg\neg F$) sia deducibile;
- se $F = 0-1$, stiamo supponendo che $\neg F$ sia deducibile;
- se $F = 1/2-0$, stiamo supponendo che F non è deducibile ma lo è $\neg\neg F$;
- se $F = 1/2-1/2$, non stiamo facendo alcuna assunzione di deducibilità.

Supponiamo dunque di aver valutato F e G e di doverci esprimere su $F \circ G$. Per quanto detto precedentemente, i valori attribuiti ad F e a G corrispondono ad assunzioni sulla deducibilità di alcune formule. Se da queste risulta deducibile $F \circ G$, allora $F \circ G$ verrà valutata $1-0$; se risulta refutabile $F \circ G$, allora essa sarà valutata $0-1$; se $F \circ G$ non è né deducibile, né refutabile allora assumerà il valore $1/2-0$ o $1/2-1/2$ qualora, rispettivamente, sia deducibile $\neg\neg F$ o meno. Si nota subito, tuttavia, che la deducibilità di $F \circ G$ (e negazioni, ovvero $\neg(F \circ G)$ e $\neg\neg(F \circ G)$) non è una questione che interessa unicamente la deducibilità di F e di G (e negazioni), ma anche la forma di F e G. A titolo di esempio osserviamo che, valutando F e G entrambi $1/2-1/2$, ovvero non sfruttando alcuna informazione sulla loro deducibilità, non possiamo concludere la deducibilità di $\neg(F \wedge G)$ in generale; tuttavia, se G coincide con $\neg F$ (e questo è coerente coi valori di verità assunti dalle due formule), la formula in questione coincide col principio di non contraddizione, dimostrabile anche intuizionisticamente. In tali casi di “ambiguità”, attribuiamo più valori di verità ad $F \circ G$. La semantica delle valutazioni che mostreremo, dunque, differisce da quella classica almeno in due aspetti:

- i valori di verità a disposizione sono 4;
- il valore di verità di $F \circ G$ potrebbe non essere unico.

Riportiamo di seguito la Tabella 7 e studiamo alcuni casi significativi per comprendere perché sono stati attribuiti determinati valori. Si presterà particolare attenzione ai casi in cui per una formula risultano più valori possibili:

- se F e G sono entrambi valutati $1-0$, allora $F \wedge G$ è $1-0$, in quanto dimostrabile da F e da G. Vale anche il viceversa, visto che da una dimostrazione di $F \wedge G$ seguono una dimostrazione di F e una di G;

- se una delle due formule, ad esempio F, è valutata $1-0$, indipendentemente dal valore assunto da G, $F \vee G$ è $1-0$, in quanto deducibile assumendo la deducibilità di F. Inoltre, se $F \vee G$ è $1-0$, in base alla proprietà della disgiunzione, significa che F è dimostrabile o lo è G e quindi almeno una delle due è valutata $1-0$;

- se G è deducibile oppure F è refutabile, allora $F \to G$ è deducibile, dato che $G \rhd_p F \to G$ e che $\neg F \rhd_p F \to G$ (Deduzione 10, Appendice A).

- siano $F = 1/2-0$ e $G = 1/2-0$. Indipendentemente dalla forma di F e di G, dunque, sappiamo che sono deducibili $\neg\neg F$ e $\neg\neg G$ ma non F o G:

  - $F \wedge G$ non è deducibile altrimenti lo sarebbe anche F, contro $F = 1/2-0$; non è refutabile perché $\neg(F \wedge G), \neg\neg F \rhd_p \neg G$ (Deduzione 3, Appendice A), contro $G = 1/2-0$. Infine poiché sussiste la seguente deduzione $\neg\neg F, \neg\neg G \rhd_p \neg\neg(F \wedge G)$ (Deduzione 12, Appendice A), $F \wedge G = 1/2-0$ e il risultato ottenuto vale indipendentemente dalla forma di F e di G.

  - $F \vee G$ non può essere $1-0$ perché sia F che G sono diversi da $1-0$, contro la proprietà della disgiunzione; non può essere refutabile, altrimenti sarebbe refutabile F (Deduzione 5, Appendice A), contro $F = 1/2-0$. Infine, poiché sussiste la seguente deduzione $\neg\neg F \rhd_p \neg\neg(F \vee G)$ (Deduzione 13, Appendice A), $F \vee G = 1/2-0$ e il risultato ottenuto vale indipendentemente dalla forma di F e di G.

  - $F \to G$ non può essere né $0-1$, dato che $\neg(F \to G) \rhd_p \neg G$ (Deduzione 8, Appendice A) contro $G = 1/2-0$, né $1/2-1/2$, visto che $\neg\neg G \rhd_p \neg\neg(F \to G)$ (Deduzione 14, Appendice A). Dunque $F \to G$ potrebbe assumere solamente $1/2-0$ o $1-0$. In generale, da $\neg\neg G$ e da $\neg\neg F$ non si può dimostrare $F \to G$ (ciò implicherebbe ad esempio, se $F = \top$ e $G = A \vee \neg A$ con A atomica, la deducibilità del principio del terzo escluso per A), ma in alcuni casi particolari (ad esempio se F coincide con G) $F \to G$ è deducibile. Dunque $F \to G$ può assumere sia $1/2 - 0$ che $1 - 0$, a seconda della forma delle formule di partenza.

- siano $F = 1/2 - 1/2$ e $G = 1/2 - 1/2$.
  - $F \wedge G$ non può essere dimostrata, altrimenti sarebbe deducibile F, contro $F = 1/2$; non è deducibile neanche $\neg\neg(F \wedge G)$, altrimenti sarebbe deducibile $\neg\neg F$ (Deduzione 15, Appendice A), contro $F = 1/2 - 1/2$. Rimangono quindi unicamente i valori $1/2 - 1/2$ e $0 - 1$. In generale, non è detto che sia deducibile né $F \wedge G$, né le sue negazioni, però in alcuni casi particolari (G coincide con $\neg F$, cosa coerente con i valori di verità delle due formule) la formula in questione è refutata. Dunque $F \wedge G$ può assumere sia $1/2 - 1/2$ che $0 - 1$.
  - $F \vee G$ non può essere dimostrata perché altrimenti, per la proprietà della disgiunzione, F o G lo sarebbero; non può essere refutata perché altrimenti sarebbe dimostrabile $\neg F$ (Deduzione 5, Appendice A). Quindi $F \vee G = 1/2$. L'ambiguità su $\neg(F \vee G)$ non può essere evitata, visto che, sebbene in generale non possa essere refutata, in alcuni casi particolari (se G coincide con $\neg F$, caso coerente con i valori di verità delle due formule) la formula in questione è la negazione del principio del terzo escluso per F, la quale è refutabile.
  - $F \to G$ non è refutabile poiché seguirebbe che G è refutabile (Deduzione 8, Appendice A). Gli altri valori rimasti possono tutti essere assunti. In generale, infatti, nulla garantisce che $F \to G$ e negazioni siano deducibili senza ipotesi su F e G e ciò legittima la presenza del valore $1/2 - 1/2$; se F coincide con G (caso coerente con i valori di verità delle due formule) allora la formula è deducibile senza assunzioni attive, legittimando il valore $1 - 0$; se F è $\neg\neg A$ e G è A, con A atomica (caso coerente con i valori di verità assunti dalle due formule), allora $F \to G$ diventerebbe la legge di doppia negazione per A che assume il valore $1/2 - 0$ in quanto non deducibile ma deducibile la sua doppia negazione.

Definizione 3.1. Una funzione v che ad ogni formula associa un valore di verità nell'insieme $V = \{1 - 0, 0 - 1, 1/2 - 0, 1/2 - 1/2\}$ seguendo le regole imposte dalla Tabella 7, ovvero $v(F \circ G)$ è uno dei valori compatibili con

F	G	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \to G$
$1-0$	$1-0$	$1-0$	$1-0$	$1-0$
	$1/2-0$	$1/2-0$	$1-0$	$1/2-0$
	$1/2-1/2$	$1/2-1/2$	$1-0$	$1/2-1/2$
	$0-1$	$0-1$	$1-0$	$0-1$
$1/2-0$	$1-0$	$1/2-0$	$1-0$	$1-0$
	$1/2-0$	$1/2-0$	$1/2-0$	$1-0$ $1/2-0$
	$1/2-1/2$	$1/2-1/2$	$1/2-0$	$1/2-1/2$
	$0-1$	$0-1$	$1/2-0$	$0-1$
$1/2-1/2$	$1-0$	$1/2-1/2$	$1-0$	$1-0$
	$1/2-0$	$1/2-1/2$	$1/2-0$	$1/2-0$ $1-0$
	$1/2-1/2$	$1/2-1/2$ $0-1$	$1/2-1/2$ $1/2-0$	$1/2-1/2$ $1/2-0$ $1-0$
	$0-1$	$0-1$	$1/2-1/2$	$1/2-1/2$
$0-1$	$1-0$	$0-1$	$1-0$	$1-0$
	$1/2-0$	$0-1$	$1/2-0$	$1-0$
	$1/2-1/2$	$0-1$	$1/2-1/2$	$1-0$
	$0-1$	$0-1$	$0-1$	$1-0$

Tabella 7: Tavola di verità

$v(F)$ e $v(G)$ secondo la Tabella 7 e tale che $v(\perp) = 0-1$ è detta *valutazione*. Una valutazione è detta *classica* se alle formule atomiche associa $1-0$ oppure $0-1$. Una valutazione v *soddisfa* una formula F se $v(F) = 1-0$.

Osserviamo che, se ogni formula atomica viene valutata $1-0$ o $0-1$, nessuna formula può assumere i valori $1/2-0$ e $1/2-1/2$ e inoltre la Tabella 7 ristretta all'insieme dei valori di verità $\{1-0, 0-1\}$ coincide con le tavole di verità classiche. Dunque, se ci restringiamo alle valutazioni classiche, nel senso della Definizione 3.1, ritroviamo la semantica classica delle valutazioni S_2. Nel seguito, nel caso di valutazioni classiche, capiterà di indicare $v(F) = 1-0$ semplicemente con $v(F) = 1$ e $v(F) = 0-1$ con $v(F) = 0$.

Sebbene non possa rappresentare il punto di arrivo, vanno riconosciuti alcuni pregi di una semantica basata su queste valutazioni. Sembra, infatti, che queste permettono già di distinguere alcune formule deducibili classicamente ma non intuizionisticamente. Nella Tabella 8 sono riportati alcuni esempi facilmente derivabili dalla Tabella 7. Evidenziamo soltanto il caso in cui F

viene valutata 1/2, visto che nelle altre circostanze si ricade nella semantica classica e non si può scorgere nessuna differenza tra formule deducibili classicamente e formule deducibili intuizionisticamente.

A	$A \to A$	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg\neg A \to A$	$A \vee \neg A$	$A \to \neg\neg A$
$1/2 - 0$	$1/2 - 0$ $1 - 0$	$1 - 0$	$1/2 - 0$	$1/2 - 0$	$1 - 0$
$1/2 - 1/2$	$1/2 - 1/2$ $1/2 - 0$ $1 - 0$	$1/2 - 1/2$ $1 - 0$	$1/2 - 1/2$ $1/2 - 0$ $1 - 0$	$1/2 - 1/2$ $1/2 - 0$	$1/2 - 1/2$ $1/2 - 0$ $1 - 0$

Tabella 8: Esempi rilevanti

Per quanto riguarda le formule deducibili anche intuizionisticamente (seconda, terza e sesta colonna), esse sono valutate 1/2 oppure 1, qualsiasi sia il valore di verità di A. Tuttavia per le formule deducibili solo classicamente esistono dei valori di verità di A ($1/2 - 0$ per la quarta colonna e $1/2 - 0$ o $1/2 - 1/2$ per la quinta colonna) per cui nessuna valutazione valuta 1 la formula considerata, ma solo 1/2. Sembrerebbe quindi che valga una sorta di teorema di correttezza:

Ipotesi 3.4. *Se una formula F è deducibile intuizionisticamente, allora per ogni scelta di valori di verità a livello atomico, esiste una valutazione v che condivide tali giudizi e che soddisfa F.*

La validità di una tale proprietà sembra ragionevole visto come è stata creata la Tabella 7 e verrà dimostrata in seguito, nel Corollario 3.8. Notiamo che tale asserzione già basterebbe per dimostrare la non deducibilità del principio del terzo escluso e della legge di doppia negazione.

Ribadiamo che, comunque, sebbene tale semantica sembri cogliere alcune differenze tra logica classica e intuizionistica, essa presenta dei problemi: uno di questi è che ci sono valutazioni che si esprimono su formule deducibili intuizionisticamente in maniera diversa da $1 - 0$. A titolo di esempio si osservi che se A è un atomo, esiste una valutazione v per cui $v(A) = 1/2 - 0$ e $v(A \to A) = 1/2 - 0$, sebbene tale formula sia deducibile. Un motivo di tali errori può essere rintracciato nella simmetria che sottosta a tale semantica. Per come sono state concepite le valutazioni, infatti, se F e G hanno lo stesso valore di verità, dal punto di vista semantico non sono distinguibili $F \circ G$ e $F \circ F$. Ad esempio, se F e G assumono entrambi il valore $1/2 - 1/2$, non c'è nulla che discrimina $F \to G$ da $F \to F$, in quanto i valori che possono essere assunti da una valutazione nelle varie formule in questione sono gli stessi. Ovviamente, ciò costituisce un problema, visto che c'è una differenza sostanziale tra le due formule: la seconda è sempre deducibile, la prima in generale no. È questa asimmetria della sintassi che non trova corrispondenza nella semantica individuata a generare problemi.

Si potrebbe pensare di intervenire sulla Tabella 7 operando delle distinzioni basate sulla forma di F e G. Tale procedimento sembra molto complesso e spieghiamo il perché con uno dei casi più semplici in cui si presenta tale problema. Supponiamo che F e G siano valutate $1/2 - 1/2$ e vogliamo associare un valore di verità a $F \wedge G$. Dalla Tabella 7 risultano due i valori possibili. Sotto quali condizioni $F \wedge G$ deve essere valutata $0 - 1$? Sicuramente un caso è quando una formula è la negazione dell'altra, ma esistono altre relazioni di forma tra le due formule che forzano la refutabilità di $F \wedge G$. Ad esempio se $G \rhd_p \neg F$, $F \wedge G$ implicherebbe la negazione del principio di non-contraddizione e quindi va refutata. Molto probabilmente ci saranno altri rapporti di deducibilità tra F e G che comportano la refutabilità della formula in questione e sembra estremamente difficile tener conto di tutte queste differenze in maniera semplice ed algoritmica, senza creare un alter ego di un sistema deduttivo per la logica in questione. Preferiamo dunque evitare tale modo di procedere, pur sacrificando, per preservare la semplicità della costruzione fornita, alcuni possibili vantaggi che ne potremmo trarre. Nella sezione successiva cerchiamo di focalizzarci sulle valutazioni come sopra definite e di "adeguare" quelle che lo richiedono.

3.2 Processo di adeguamento di una valutazione

Innanzitutto ribadiamo che i problemi della semantica, sopra evidenziati, risiedono tutti nel caso in cui una formula viene valutata $1/2$: nella circostanza in cui, infatti, ogni formula viene valutata $0 - 1$ o $1 - 0$, si ricade nelle tavole di verità classiche e, in particolare, non c'è possibilità di scelta su quale valore assegnare ad una formula, in quanto univocamente determinato. Cerchiamo quindi, nel caso in cui una valutazione valuti $1/2 - 0$ o $1/2 - 1/2$ una formula, di creare un espediente per giungere a delle valutazioni "adeguate". Prima di fare questo, tuttavia, proviamo a formalizzare meglio tale termine.

Definizione 3.2. Sia $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle formule atomiche del linguaggio. Una funzione h è detta *adeguata* se per ogni formula F:

- $h(F) = 1 - 0$ se e solo se dall'insieme di formule $\{{A_i}^h : i \in \mathbb{N}\}$ è deducibile F;

- $h(F) = 0 - 1$ se e solo se dall'insieme di formule $\{{A_i}^h : i \in \mathbb{N}\}$ è deducibile $\neg F$;

- $h(F) = 1/2 - 0$ se e solo se dall'insieme di formule $\{A_i{}^h : i \in \mathbb{N}\}$ non è deducibile F ma è deducibile $\neg\neg F$;
- $h(F) = 1/2 - 1/2$ se e solo se dall'insieme di formule $\{A_i{}^h : i \in \mathbb{N}\}$ non è deducibile né F, né $\neg F$, né $\neg\neg F$,

dove:

- $A_i{}^h$ coincide con A_i se $h(A_i) = 1 - 0$;
- $A_i{}^h$ coincide con $\neg A_i$ se $h(A_i) = 0 - 1$;
- $A_i{}^h$ coincide con $\neg\neg A_i$ se $h(A_i) = 1/2 - 0$;
- $A_i{}^h$ coincide con $\top$ se $h(A_i) = 1/2 - 1/2$.

Una funzione che non è adeguata è detta *inadeguata*.

Visto l'approccio classico adottato a livello metamatematico, è normale affermare che, fissato il valore di verità per ogni formula atomica, esiste una e un'unica funzione adeguata che condivide tali giudizi atomici. Tuttavia, non è per nulla evidente che esistano delle valutazioni adeguate, ovvero delle funzioni adeguate che siano anche delle valutazioni. Vale, però, la seguente proprietà, che non è altro che una generalizzazione dell'argomento della dimostrazione del Teorema di Completezza per la logica proposizionale classica dovuta al logico ungherese L. Kalmár.

Proprietà 3.5. *Una valutazione classica v è adeguata.*

Dimostrazione. Sia F una formula, $A_1, \ldots, A_n$ i suoi atomi proposizionali, v una valutazione classica e $\Gamma = \{A_1^v, \ldots, A_n^v\}$, dove usiamo la notazione della Definizione 3.2. Osserviamo che Γ è coerente, in quanto esiste una valutazione classica (v) che lo soddisfa. Consideriamo le seguenti proprietà:

$$v(F) = 1 - 0 \text{ se e solo se } \Gamma \rhd_p F;$$
$$v(F) = 0 - 1 \text{ se e solo se } \Gamma \rhd_p \neg F.$$

Da queste segue facilmente la tesi visto che v è classica e non può mai accadere che $v(F) = 1/2 - 0$ o $v(F) = 1/2 - 1/2$. Inoltre, visto che si verifica uno e un solo caso tra $v(F) = 1 - 0$ e $v(F) = 0 - 1$, e che $\Gamma \not\rhd_p \bot$, dimostrare le proprietà sopra equivale a dimostrare le seguenti:

$$\text{se } v(F) = 1 - 0, \text{ allora } \Gamma \rhd_p F;$$
$$\text{se } v(F) = 0 - 1, \text{ allora } \Gamma \rhd_p \neg F.$$

Procediamo nella dimostrazione della validità delle implicazioni sopra, per induzione sull'altezza di F:

- sia $F = F_1 \wedge F_2$. Poiché v è classica, se $v(F) = 1-0$, allora $v(F_1) = v(F_2) = 1-0$. Per ipotesi induttiva, questo equivale a dire che $\Gamma \rhd_p F_1$ e $\Gamma \rhd_p F_2$ e cioè che $\Gamma \rhd_p F$. Se $v(F) = 0-1$, allora $v(F_1) = 0-1$ o $v(F_2) = 0-1$. Senza perdita di generalità, supponiamo di essere nel primo caso e, per ipotesi induttiva, $\Gamma \rhd_p \neg F_1$. La tesi segue dal notare che $\neg F_1 \rhd_p \neg(F_1 \wedge F_2)$ (Deduzione 4, Appendice A).

- sia $F = F_1 \vee F_2$. Poiché v è classica, $v(F) = 1-0$ se e solo se $v(F_1) = 1-0$ o $v(F_2) = 1-0$. Per ipotesi induttiva, questo equivale a dire che $\Gamma \rhd_p F_1$ o $\Gamma \rhd_p F_2$, il che implica $\Gamma \rhd_p F$. Se $v(F) = 0-1$, allora $v(F_1) = 0-1$ e $v(F_2) = 0-1$. Per ipotesi induttiva, $\Gamma \rhd_p \neg F_1$ e $\Gamma \rhd_p \neg F_2$, da cui segue la tesi notando che $\neg F_1, \neg F_2 \rhd_p \neg(F_1 \vee F_2)$ (Deduzione 17, Appendice A).

- sia $F = \neg F_1$. Se $v(F) = 1-0$, allora $v(F_1) = 0-1$ e per ipotesi induttiva $\Gamma \rhd_p F$. Se $v(F) = 0-1$, allora $v(F_1) = 1-0$ e per ipotesi induttiva, $\Gamma \rhd_p F_1$. Poiché $F_1 \rhd_p \neg\neg F_1$, si ha $\Gamma \rhd_p \neg F$;

- sia $F = F_1 \to F_2$. Se $v(F) = 1-0$, allora $v(F_1) = 0-1$ oppure $v(F_2) = 1-0$. Per ipotesi induttiva, dunque, $\Gamma \rhd_p \neg F_1$ o $\Gamma \rhd_p F_2$ e in entrambi i casi da Γ si deduce F. Se $v(F) = 0-1$, ovvero $v(F_1) = 1-0$ e $v(F_2) = 0-1$, allora la tesi segue dal fatto che $F_1, \neg F_2 \rhd_p \neg(F_1 \to F_2)$ (Deduzione 16, Appendice A).

□

Come abbiamo già evidenziato precedentemente, non è detto che esistano valutazioni adeguate, sebbene sembri ragionevole supporlo per come è stata costruita la Tabella 7. In particolare, l'esistenza di valutazioni adeguate per una qualsiasi scelta di valori di verità a livello atomico è essenzialmente legata al teorema di correttezza espresso nell'Ipotesi 3.4: attraverso il successivo Teorema 3.9, si capirà che effettivamente esistono tali valutazioni. Per la costruzione di una semantica adeguata per la logica intuizionistica quello che cerchiamo è proprio un metodo per trovare valutazioni adeguate. Vista la già discussa difficoltà di introdurre una tale nozione, sebbene questo sia il nostro fine ultimo, proseguiremo cercando piuttosto di evitare le valutazioni non adeguate, ovvero affinando un metodo che ci permetta facilmente di escluderle: in linea teorica potremmo alla fine rimanere con qualche valutazione (che sarà dunque adeguata) oppure eliminarle tutte. Per il Teorema 3.9, ci troveremo nel primo caso. Nel seguito parleremo di "processo di adeguamento di una valutazione" o di "adeguare una valutazione" intendendo ogni accortezza che ci permetta di scartare alcuni valori di verità, assumibili secondo la Tabella 7 da una formula, che renderebbero sicuramente inadeguata la valutazione. Ribadiamo, per chiarezza, quindi, che il tentativo sarà quello di trovare una valutazione adeguata, ma poiché non sappiamo ancora se una tale valutazione esita, cercheremo di evitare che essa si esprima in maniera inadeguata già in formule molto semplici.

Osserviamo che, fissati i valori di verità per le formule atomiche, la funzione adeguata che condivide tali giudizi è unica. Siano infatti h_1 e h_2 due valutazioni adeguate distinte. Esisterà, dunque, una formula F per cui $h_1(F) \neq h_2(F)$ e da questo segue facilmente (considerando eventualmente anche $\neg F$ o $\neg\neg F$) l'esistenza di una formula G per cui, senza perdita di generalità, $h_1(G) = 1 - 0$ e $h_2(G) \neq 1 - 0$. Ma non può accadere che da uno stesso insieme $\{{A_i}^{h_1} : i \in \mathbb{N}\} = \{{A_i}^{h_2} : i \in \mathbb{N}\}$ sia nello stesso tempo deducibile e non deducibile G, da cui l'assurdo.

In alcuni casi è abbastanza semplice riconoscere una valutazione inadeguata. Ad esempio, nel caso in cui $F = 1/2 - 1/2$ i valori possibili per $F \to F$ sono tre: $1/2 - 1/2$, $1/2 - 0$, $1 - 0$. Di questi solo l'ultimo è quello corretto per la formula che stiamo considerando, vista la sua deducibilità. Notiamo che possiamo, però, facilmente escludere il primo valore ricorrendo solamente alle valutazioni classiche. Infatti, sapendo che ogni valutazione classica si esprime su $F \to F$ $1 - 0$, per la adeguatezza di S_2 per la logica classica, si ha che $\rhd_c F \to F$ e dunque, per il Teorema di Glivenko, necessariamente $\rhd_p \neg\neg(F \to F)$. Un altro esempio degno di essere studiato è costituito da $\neg(F \wedge \neg F)$. Valutando sempre $F = 1/2 - 1/2$, si ha $\neg F = 1/2 - 1/2$ e quindi i valori possibili per $F \wedge \neg F$ sono $1/2 - 1/2$ o $0 - 1$. Tuttavia, il fatto che classicamente è deducibile $\neg(F \wedge \neg F)$ permette di concludere, sempre per il Teorema di Glivenko, che tale formula è deducibile anche intuizionisticamente e perciò, grazie a questa accortezza, si riesce ad attribuire il giusto valore di verità alla formula considerata. Le valutazioni classiche, pertanto, permettono in maniera semplice di riconoscere alcune valutazioni inadeguate.

Ad una valutazione, quindi, possiamo associare in maniera "compatibile", in un senso da specificare, un insieme di valutazioni classiche. Supponiamo ad esempio di interrogarci sull'adeguatezza di una valutazione che si esprime $1 - 0$ su una formula atomica A, ovvero, in altre parole, cercare di capire se una formula generica F è deducibile da A o non lo è. Per avere una prima risposta in merito, posso indagare la questione a livello classico, cercando di capire se F è conseguenza nella semantica classica di A. A tale scopo, non saranno necessarie tutte le valutazioni classiche, ma solo quelle che si esprimono vere su A. In maniera analoga si può argomentare il fatto che, dovendo testare se una valutazione che in A si esprime $0 - 1$ sia adeguata o meno, bisogna ricorrere alle valutazioni classiche che considerano false A. Tali due casi preliminari ci permettono di affrontare il caso spinoso in cui $A = 1/2$. Se una valutazione si esprime su A $1/2-0$, allora si esprime $0-1$ su $\neg A$ e quindi dovremo considerare le valutazioni classiche che considerano falsa $\neg A$. Data la bivalenza delle valutazioni classiche, questo equivale a considerare l'insieme delle valutazioni che ritengono vera A. Per il caso in cui $A = 1/2 - 1/2$, invece, non ci si può limitare ad una delle classi sopra presentate di valutazioni classiche. Infatti, in questo frangente, se dobbiamo valutare in maniera adeguata una formula F, non abbiamo nessuna relazione di conseguenza semantica da testare e quindi F sarà $1 - 0$ se è deducibile, *indipendentemente da deduzioni di A, $\neg A$ o $\neg\neg A$* (che non sussistono). Pertanto, dovremmo considerare tutte le valutazioni classiche, sia quelle che si esprimono vere su A, sia quelle che si esprimono false. Introduciamo, in maniera rigorosa, tale concetto di "compatibilità" che risulterà utile nel seguito:

Definizione 3.3. Sia $\{A_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle formule atomiche del linguaggio. Una valutazione classica v_c è *compatibile* con una valutazione v se e solo se:

- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 1 - 0$, allora $v_c(A_i) = 1$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 0 - 1$, allora $v_c(A_i) = 0$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 1/2 - 0$, allora $v_c(A_i) = 1$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 1/2 - 1/2$, allora $v_c(A_i) = 1$ o $v_c(A_i) = 0$.

Prima di proseguire consideriamo un esempio semplice che ci guiderà: supponiamo di avere una valutazione v che si esprime $1/2 - 1/2$ sulla formula atomica A e supponiamo di voler evitare che sia inadeguata almeno per le formule che contengono come atomo solo A. Ha senso distinguere le valutazioni classiche che consideriamo in due classi: quelle che si esprimono vere su A e quelle che si esprimono false. Osserviamo inoltre che due valutazioni classiche che si esprimono allo stesso modo su A, si esprimeranno allo stesso modo anche sulle formule che contengono solo A come atomo, indipendentemente dai valori attribuiti ad altre formule atomiche diverse da A: considereremo dunque, visto lo scopo in esame, solo due valutazioni classiche, v_c^1 e v_c^2 le quali si esprimono rispettivamente 1 e 0 su A e arbitrariamente sugli altri atomi. Osservando la Tabella 8 e combinando le informazioni fornite dalle valutazioni classiche, ovvero eliminando i valori di verità incoerenti con uno studio basato sulla semantica classica, otteniamo la Tabella 9.

Commentiamo tale risultato evidenziando alcune conquiste implicate da tale approccio:

- la terza colonna mostra come, qualsiasi sia il valore di A, ogni valutazione riconosce vera il principio di non-contraddizione per A.

A	$A \to A$	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg\neg A \to A$	$A \vee \neg A$	$A \to \neg\neg A$
$1/2 - 0$	$1/2 - 0$ $1 - 0$	$1 - 0$	$1/2 - 0$	$1/2 - 0$	$1 - 0$
$1/2 - 1/2$	$1/2 - 0$ $1 - 0$	$1 - 0$	$1/2 - 0$ $1 - 0$	$1/2 - 0$	$1/2 - 0$ $1 - 0$

Tabella 9: Effetti dell'intervento delle valutazioni classiche nella Tabella 8

- la quinta colonna mostra come, qualsiasi sia il valore di A, ogni valutazione riconosce falsa la negazione del principio del terzo escluso, ovvero riconosce vera $\neg\neg(A \vee \neg A)$. Inoltre, ogni valutazione che si esprime $1/2$ su A, si esprime $1/2 - 0$ su $A \vee \neg A$, come previsto;

- ogni valutazione riconosce la deducibilità di $\neg\neg G$ per ogni formula G considerata in tabella.

Mettiamo subito in luce il limite di considerare solo le valutazioni classiche. Infatti non si ha, come è da aspettarsi, una distinzione tra le formule deducibili intuizionisticamente e quelle deducibili solo classicamente. A titolo di esempio notiamo che, sebbene entrambe le valutazioni classiche considerate v_c^1 e v_c^2 reputino $A \vee \neg A$ una tautologia, questa non è deducibile intuizionisticamente. Rimane indispensabile la valutazione di partenza.

Introduciamo già con questo esempio, un primo collegamento tra la semantica che stiamo creando e quella di Kripke, sperando che questo, seppur spiegato ora in maniera imprecisa e incompleta, servirà a capire meglio la strada percorsa nel seguito. Riprenderemo tale discorso nella Sezione 3.3. Il processo di adeguamento di una valutazione che si esprime $1/2 - 1/2$ su A, può essere descritto dall'albero in Figura 2. La radice 0 corrisponde alla valutazione iniziale mentre le foglie 1 e 2 corrispondono alle valutazioni classiche utilizzate nel ragionamento precedente e cioè rispettivamente v_c^1 e v_c^2. Un'argomentazione analoga mostra come la Figura 3 rappresenti un tale processo per una valutazione che si esprime su A $1/2 - 0$.

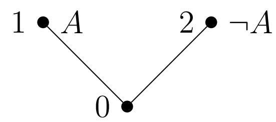


Figura 2: Albero del processo di adeguamento di una valutazione per cui A=1/2-1/2

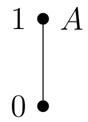


Figura 3: Albero del processo di adeguamento di una valutazione per cui A=1/2-0

Quanto detto finora, circa la relazione tra valutazioni e semantica classica, può essere riassunto nel seguente teorema.

Teorema 3.6. *Sia v una valutazione e siano F e G due formule.*

1. *Allora:*

   (a) *se ogni valutazione classica compatibile con v falsifica F e $v(F) \neq 0-1$, allora v è inadeguata;*

   (b) *se ogni valutazione classica compatibile con v rende vera F e $v(\neg\neg F) \neq 1-0$, allora v è inadeguata.*

2. *Di conseguenza, nel caso in cui $v(F) = v(G) =$ 1/2-1/2 si ha:*

   (a) *se ogni valutazione classica compatibile con v falsifica $F \wedge G$ e $v(F \wedge G) = 1/2 - 1/2$, allora v è inadeguata;*

   (b) *se esiste almeno una valutazione classica compatibile con v che rende vera $F \wedge G$ e $v(F \wedge G) = 0 - 1$, allora v è inadeguata;*

   (c) *se ogni valutazione classica compatibile con v rende vera $F \vee G$ e $v(F \vee G) = 1/2 - 1/2$, allora v è inadeguata;*

   (d) *se esiste almeno una valutazione classica compatibile con v che rende falsa $F \vee G$ e $v(F \vee G) = 1/2 - 0$, allora v è inadeguata;*

   (e) *se ogni valutazione classica compatibile con v rende vera $F \to G$ e $v(F \to G) = 1/2 - 1/2$, allora v è inadeguata;*

   (f) *se esiste almeno una valutazione classica compatibile con v che rende falsa $F \to G$ e $v(F \to G) \neq 1/2-1/2$, allora v è inadeguata.*

Dimostrazione. Basta dimostrare 1. visto che 2. ne è un semplice corollario considerando la Tabella 7. Sia $\Gamma = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle formule atomiche del linguaggio e indichiamo con Γ^v l'insieme $\{A_i^v : i \in \mathbb{N}\}$, dove usiamo la notazione della Definizione 3.2. Osserviamo che ogni valutazione classica compatibile con v riconosce vera una qualsiasi formula di Γ^v e, viceversa, ogni valutazione classica che valuta ogni formula di Γ^v $1-0$ è compatibile con v. Segue che ogni valutazione classica compatibile con v falsifica F se e solo se $\Gamma^v \vDash_c \neg F$, dove $\vDash_c$ indica la relazione di conseguenza semantica nella semantica delle valutazioni classica. Per il Teorema di Adeguatezza per la logica proposizionale classica, questo equivale a $\Gamma^v \rhd_{pc} \neg F$ e per il Teorema di Glivenko a $\Gamma^v \rhd_p \neg F$, da cui il punto a). Il punto b) segue immediatamente da a) e dalla bivalenza delle valutazioni classiche. $\square$

Osservando la Tabella 7, tale risultato permette subito di dipanare ogni dubbio sul valore di verità attribuito da una ipotetica valutazione adeguata ad una formula F priva del simbolo $\to$.

Essenzialmente, l'approccio che abbiamo usato finora cerca di adeguare una valutazione attraverso le valutazioni classiche compatibili con quella di partenza. Tuttavia, si potrebbe pensare di usare anche altre valutazioni. Sembra infatti del tutto naturale, nel cercare di evitare il caso in cui la valutazione che si esprime sugli atomi A e B $1/2-1/2$ risulti inadeguata, considerare anche delle valutazioni "intermedie" tra quella di partenza e quelle classiche.

Chiariamo come si vuole procedere con un esempio. Supponiamo di voler capire se è deducibile o meno la formula $F := A \to (\neg\neg B \to B)$, senza assunzioni sulla deducibilità degli atomi A e B o delle loro negazioni. Considerando, a tal scopo, una valutazione v per cui sia A che B risultano $1/2-1/2$, si ha, per la Tabella 7, che $v(F) \in \{1/2-1/2, 1/2-0, 1-0\}$; attraverso le valutazioni classiche ci si rende conto del fatto che $\rhd_c F$ e, quindi, che deve essere scartato il caso in cui $v(F) = 1/2-1/2$. In realtà possiamo escludere anche la deducibilità di F: se fosse deducibile si avrebbe una dimostrazione della formula in questione ripercorribile anche nel caso in cui $\neg\neg B$ e A siano deducibili ma non lo è B. In questo caso però si avrebbe una dimostrazione anche di B, il che va contro le ipotesi fatte. Parlando in termini di valutazioni, la valutazione $\bar{v}$ che si esprime $1-0$ su A e $1/2-0$ su B vieta alla valutazione per cui A e B valgono $1/2-1/2$ di valutare F $1-0$. Infatti, $\bar{v}(\neg\neg B \to B) = 1/2-0$ e $\bar{v}(F) = 1/2-0$, ovvero $\bar{v}$ non soddisfa F.

Il nocciolo del modus operandi che l'esempio precedente mostra può essere schematizzato nei seguenti punti:

- l'utilizzo di una valutazione $\bar{v}$ nel processo di adeguamento di una valutazione di partenza v, aggiunge delle ipotesi sulla deducibilità di alcune formule (quelle che $\bar{v}$ valuta $1-0$);

- se v sancisce che una formula F è deducibile, allora lo è anche con le ipotesi aggiuntive associate ad una valutazione $\bar{v}$ che compare nel processo di adeguamento di v;

- se un valore possibile di $v(F)$ entra in contraddizione con le ipotesi di deducibilità introdotte, v è inadeguata e dunque valutazioni di questo tipo devono essere scartate.

Ovviamente, come nel caso delle valutazioni classiche, non tutte le ipotesi aggiuntive sono coerenti con la valutazione di partenza e dunque utili: se questa ritiene deducibile un atomo A, non può in alcun modo essere compatibile l'ipotesi di refutabilità dello stesso. Ciò motiva la seguente definizione.

Definizione 3.4. Sia $\{A_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle formule atomiche del linguaggio. Una valutazione $\bar{v}$ è *compatibile* con una valutazione v se e solo se:

- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 1 - 0$, allora $\bar{v}(A_i) = 1 - 0$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 0 - 1$, allora $\bar{v}(A_i) = 0 - 1$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 1/2 - 0$, allora $\bar{v}(A_i) = 1/2 - 0$ oppure $\bar{v}(A_i) = 1 - 0$;
- per ogni $i \in \mathbb{N}$, se $v(A_i) = 1/2 - 1/2$, allora $\bar{v}(A_i)$ può assumere qualsiasi valore di verità.

Confrontando la Definizione 3.3 e la Definizione 3.4 osserviamo che una *valutazione classica* è compatibile con v se è una valutazione sia classica che compatibile con v.

3.3 Un primo modo di procedere

In questa sezione percorriamo la strada su cui risulta più naturale procedere, date le considerazioni fatte in precedenza. Sebbene la semantica a cui si giunge in tal modo presenti dei problemi che verranno risolti nella sezione successiva, ci sembra utile soffermarci nel comprendere dove risiede precisamente l'errore. Questo permetterà di motivare in maniera valida le scelte compiute nel seguito.

Per quanto detto, nel processo di adeguamento di una valutazione v, sembra ragionevole ricorrere a *tutte* le valutazioni compatibili con v. In particolare, se $v(A) = 1/2 - 1/2$, è sensato ricorrere a $\bar{v}$ che si esprime su A $1/2 - 0$; a sua volta dovremo cercare di rendere $\bar{v}$ adeguata e quindi potrà essere utile anche la valutazione v_c che valuta A $1 - 0$ e che coincide con una valutazione classica compatibile con v. Essendo la nozione di 'valutazione compatibile' transitiva, si comprende l'utilità di ricorrere ad un albero per rappresentare i vari legami tra le valutazioni. Tale albero avrà le seguenti caratteristiche:

- alla radice è associata la valutazione di partenza e dunque i vari nodi dell'albero rappresenteranno le valutazioni compatibili con quelle di partenza che verranno utilizzare nel processo di adeguamento;

- ad ogni nodo sarà associata una valutazione che sarà l'oggetto del processo di adeguamento tramite le valutazioni associate ai nodi successivi;

- la valutazione associata ad un nodo è compatibile con la valutazione associata ad un suo qualsiasi predecessore e diversa da questa;

- nell'albero potranno comparire più nodi associati ad una stessa valutazione v: questo succederà, ad esempio, quando v è compatibile con due valutazioni incompatibili fra loro;

- l'albero è finito. Nel testare, infatti, la deducibilità di una formula F, due valutazioni che si esprimono sugli atomi di F allo stesso modo, non aggiungono informazioni diverse nel processo di adeguamento di F e dunque le considereremo uguali. [22] Visto che gli atomi di F sono finiti, le valutazioni compatibili con quella di partenza, e diversa da questa, sono, modulo tale identificazione, in numero finito. Come abbiamo detto, però, una stessa valutazione può essere associata a più nodi e quindi tale argomento non basta per mostrare la finitezza dell'albero in questione. Tuttavia, esso è sufficiente per garantire che, se in F compaiono n atomi, i successori immediati di un nodo siano al più 3^n (nel caso peggiore in cui v valuta $1/2 - 1/2$ ogni atomo, questo è il numero delle valutazioni compatibili con v). È facile mostrare, inoltre, che un ramo, ovvero una successione $\{v_i : i \in I\}$ per cui se $i < j$, v_j è compatibile e non identificabile con v_i, è sempre finito, indipendentemente dal nodo di partenza: un limite superiore sul numero di nodi presenti sarà 2^n. Ciò basta per concludere la finitezza dell'albero in questione;

- ad ogni foglia è associata una valutazione classica: in particolare se ad un nodo k corrisponde la valutazione v_k, ad ogni foglia successiva a k è associata una valutazione classica compatibile con v_k.

Per comodità rappresentativa, permettiamo anche che l'albero sia etichettato: se un nodo è minimale tra quelli per cui la valutazione associata rende vera A o $\neg A$, lo etichettiamo rispettivamente con A o con $\neg A$. Per chiarire meglio la situazione, mostriamo in Figura 4 l'albero associato ad una valutazione v che si esprime su A e su B $1/2 - 1/2$.

[22] Se volessimo formalizzare tale concetto matematicamente, si potrebbe dotare l'insieme delle valutazioni di una relazione di equivalenza $\sim_F$ che sussiste tra due valutazioni che

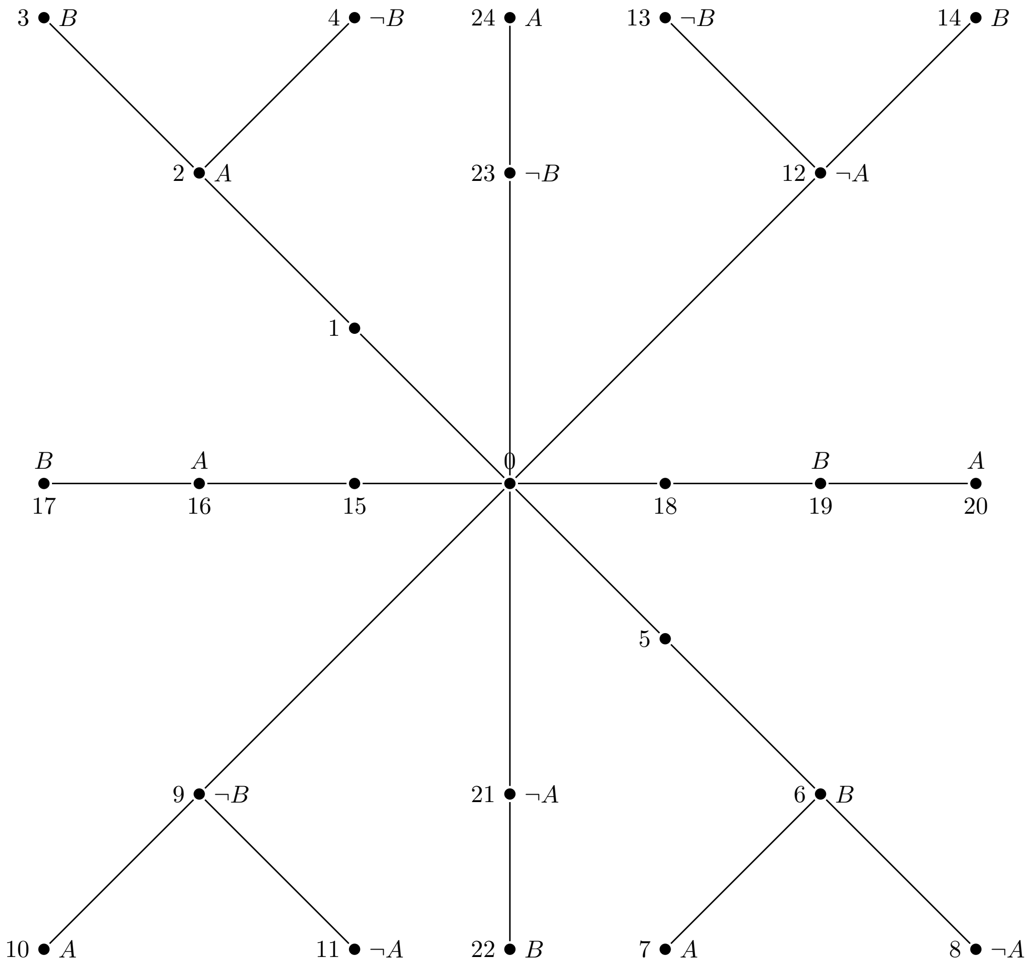


Figura 4: Albero associato ad una valutazione v per cui $v(A) = v(B) =$ 1/2-1/2.

Nell'albero compaiono *tutte* le valutazioni possibili, eventualmente più volte se, come spiegato in precedenza, risultano compatibili con due valutazioni che non sono in alcuna relazione di compatibilità tra loro.

Viste le etichette relative ad un nodo e ai suoi successivi, e considerato come è stato concepito l'albero associato al processo di adeguamento, non dovrebbe essere difficile capire, limitandoci all'osservazione del grafo in questione, come la valutazione associata al nodo si esprime sugli atomi proposizionali. Mostriamolo nel dettaglio:

- se k è etichettato con A, allora la valutazione associata al nodo k valuta A $1-0$;
- se k è etichettato con $\neg A$, allora la valutazione associata al nodo k valuta $0-1$;
- se k non è etichettato né con A, né con $\neg A$, allora valuta A $1/2-0$ o $1/2-1/2$. Per capire in quale frangente ci troviamo, basta osservare l'insieme delle valutazioni compatibili. Nel secondo caso compariranno valutazioni che falsificano A, mentre nel primo no.

Per maggiore chiarezza, portiamo alcuni esempi tratti sempre dall'albero in Figura 4: al nodo 2 è associata una valutazione che valuta A $1-0$ e B $1/2-1/2$; al nodo 16 la valutazione per cui $A = 1-0$ e $B = 1/2-0$; ai nodi 3, 7, 17 e 20 quella per cui $A = 1-0$ e $B = 1-0$; ai nodi 4 e 10 quella per cui $A = 1-0$ e $B = 0-1$.

Si osserva una forte simmetria del grafo in questione rispetto ad A e a B. Formalmente, se denotiamo con $(K, \leq, E)$ l'albero etichettato in Figura 4 (E è una funzione che ad ogni nodo k associa il sottoinsieme degli atomi del linguaggio e delle loro negazioni che etichettano k) e con $(K, \leq, E^*)$ quello che si ottiene scambiando nelle etichette A con B (e quindi $\neg A$ con $\neg B$), essi sono alberi diversi ma isomorfi: esiste una biezione $\varphi : K \to K$ che rispetta l'ordine ($k \leq k'$ se e solo se $\varphi(k) \leq \varphi(k')$) e che rispetta le etichette (k è etichettato con $A, B, \neg A, \neg B$ se e solo se $\varphi(k)$ è etichettato, rispettivamente, con $B, A, \neg B, \neg A$).

Notiamo che sebbene l'albero presenti tale simmetria, non ve ne è una rispetto ad A e $\neg A$. In particolare, visto che $\neg A$ non può assumere il valore $1/2-0$, non può accadere una configurazione come quella riportata a destra, dove il nodo 2 costituisce l'unico successore

si esprimono allo stesso modo sugli atomi di F e poi quozientare l'insieme di partenza attraverso tale relazione.

di 1. Infatti, nel caso in esame non può corrispondere alcuna valutazione al nodo 1 in quanto sarebbe problematico attribuire un valore ad A. [23]

Per quanto detto precedentemente, l'albero in Figura 4 sembrerebbe poterci informare sulla deducibilità di ogni formula F in cui compaiano A e B come atomi. Per verificare se effettivamente questo è il caso, bisogna però capire in che modo utilizzare le valutazioni "compatibili" con quella di partenza nel processo di adeguamento di quest'ultima.

Prima di proseguire osserviamo che, dato un albero come quello che stiamo considerando, ogni nodo individua un sottografo che può essere ancora considerato un albero associato al processo di adeguamento di una valutazione tramite valutazioni ad essa compatibili: in questo modo, ad esempio, con riferimento alla Figura 4, il nodo 2 genera l'albero costituito dai nodi 2,3 e 4 e rappresenta l'insieme delle valutazioni compatibili con quella associata alla nuova radice che associa ad A il valore $1-0$ e a B il valore $1/2-1/2$. Sembra dunque ragionevole non solo prestare attenzione alla valutazione associata alla radice, ma sottoporre al processo di adeguamento anche le valutazioni "intermedie" associate ai vari nodi dell'albero.

Sebbene, per quanto detto in precedenza, sia chiaro capire i valori di verità attribuiti dalla valutazione di un nodo agli atomi e alle loro negazioni, non risulta evidente come procedere per formule più complesse. Si vorrebbe associare ad ogni nodo, non solo una generica valutazione, ma una adeguata (sebbene si sia incerti sulla sua esistenza), frutto del processo di adeguamento che utilizzi i nodi successivi. Qui al lettore è possibile compiere una scelta. Egli potrebbe essere convinto della validità dell'Ipotesi 3.4 (che, ripetiamo, verrà dimostrata alla fine della trattazione) già in questa sede e quindi sostenere l'esistenza di una tale valutazione adeguata: il lavoro che faremo nel seguito sarà interpretabile come il tentativo di individuare i valori assunti da una tale valutazione adeguata eventualmente analizzando i nodi successivi e partendo, in un senso che sarà chiaro nel seguito, dalle valutazioni classiche, che sono adeguate per la Proprietà 3.5. Il lettore scettico è, invece, invitato a sostituire, nel discorso successivo, ogni occorrenza dei termini "valutazione adeguata" con "funzione adeguata". Dunque ad ogni nodo verrà associata una funzione adeguata che si esprime sugli atomi come spiegato in precedenza nello studio della relazione tra nodo, valutazione associata ed etichette;

[23] Un tale problema può essere evitato ponendo dei limiti all'etichettatura dell'albero. Il modo forse più elegante per far ciò è quello di non ammettere come etichette negazioni di atomi. Sebbene questo accorgimento sia ottimale, non verrà adottato in questo momento per ragioni di carattere espositivo. Sarebbe facile, infatti, individuare in un tale stratagemma tecnico il motivo dietro la successiva (10), anche se questa ha, in ultima analisi, un fondamento prettamente logico (basato sul Teorema di Glivenko).

il lavoro che faremo nel seguito è interpretabile, anche sotto quest'ottica, come il tentativo di individuare i valori assunti dalla funzione adeguata associata al nodo k osservando eventualmente anche altre funzioni adeguate (quelle associate ai nodi successivi) "compatibili" (nel senso della Definizione 3.4 per funzioni) e le funzioni adeguate associate alle foglie, che sono in realtà valutazioni adeguate, sempre grazie alla Proprietà 3.5. Il primo approccio ci sembra la maniera più chiara e intuitivamente più efficace per esporre il contenuto che segue e pertanto adotteremo questo.

Indicheremo la valutazione adeguata associata al nodo k con $\tilde{v}_k$. Data una formula F, denoteremo che $\tilde{v}_k(F) = 1 - 0$ con $k \Vdash F$; in caso contrario scriveremo $k \nVdash F$.

Dal fatto che $\triangleright_p F \wedge G$ equivale a $\triangleright_p F$ e $\triangleright_p G$ segue che:

$$k \Vdash F \wedge G \text{ se e solo se } k \Vdash F \text{ e } k \Vdash G. \tag{6}$$

Dalla proprietà della disgiunzione e dal fatto che $F \triangleright_p F \vee G$ (e analogamente $G \triangleright_p F \vee G$), si ha

$$k \Vdash F \vee G \text{ se e solo se } k \Vdash F \text{ o } k \Vdash G.^{24} \tag{7}$$

Siano ora k e j due nodi in un albero di un processo di adeguamento tali che $k \leq j$ e supponiamo che la valutazione adeguata $\tilde{v}_k$ si esprima $1 - 0$ su F. Dovrebbe accadere quindi che anche $\tilde{v}_j(F) = 1 - 0$ in quanto se si ha una dimostrazione per una determinata formula, la si ha anche se aumentiamo le ipotesi sulla deducibilità di alcuni atomi. Questo può essere espresso dicendo che

$$\text{se } k \leq j \text{ e } k \Vdash F, \text{ allora } j \Vdash F. \tag{8}$$

Trattiamo ora il caso del $\neg$. Dalla (8) segue immediatamente che

$$\text{se } k \Vdash \neg F, \text{ allora per ogni nodo } j \geq k \text{ si ha } j \nVdash F. \tag{9}$$

Notiamo che in realtà, negli alberi come quello in Figura 4, l'implicazione sottesa alla (9) può essere invertita. Infatti in tali alberi, considerato un nodo k, *ogni* valutazione classica compatibile con v_k corrisponde ad una foglia sopra k. Si hanno a disposizione, pertanto, informazioni sulla deducibilità classica delle formule in questione e riformulando il Teorema 3.6 si ha che

$$k \Vdash \neg F \text{ se e solo se per ogni } j \geq k,\ j \nVdash F; \tag{10}$$

$$k \Vdash \neg\neg F \text{ se e solo se per ogni } j \geq k, \text{ esiste } i \geq k \text{ tale che } i \Vdash F. \tag{11}$$

[24] Notiamo che la (6) e la (7) seguono anche dalla Tabella 7: $v(F \wedge G) = 1 - 0$ se e solo se $v(F) = v(G) = 1 - 0$ e $v(F \vee G) = 1 - 0$ se e solo se $v(F) = 1 - 0$ o $v(G) = 1 - 0$. Non è stata fornita una tale dimostrazione perché è basata irrimediabilmente sul fatto che $\tilde{v}_k$ è una valutazione. L'argomentazione sopra data, invece, rimane valida anche senza tale assunzione.

Quanto detto finora non dovrebbe risultare nuovo: si tratta semplicemente di una riformulazione, sicuramente più puntuale, delle idee già incontrate nella sezione precedente. Grazie a questi passaggi, però, è già possibile intravedere il legame tra la semantica delle valutazioni da cui siamo partiti e quella di Kripke per la logica intuizionistica.

Concludiamo accennando una soluzione parziale alla questione della relazione tra $\Vdash$ e $\to$. Supponendo che $\tilde{v}_k(F \to G) = 1 - 0$, per (8), ogni nodo j successivo a k sarà tale che $\tilde{v}_j(F \to G) = 1 - 0$. Quindi se $\tilde{v}_j(F) = 1 - 0$, dovrà anche accadere, per la Tabella 7, che $\tilde{v}_j(G) = 1 - 0$. In termini del forcing, tale proprietà diventa la seguente:

$$\text{se } k \Vdash F \to G \text{ allora per ogni } j \geq k, \text{ se } j \Vdash F \text{ allora } j \Vdash G \tag{12}$$

3.4 Collegamento con la semantica di Kripke

Siamo ora in grado di testare la capacità dell'albero in Figura 4 di cogliere le formule deducibili o no. Resta in realtà da capire ancora del tutto come sono legate le nozioni di $\Vdash$ e $\to$, tuttavia è sufficiente il frammento della logica intuizionistica privo di tale simbolo per comprendere il limite dei modelli finora esaminati. L'aver considerato, nella Figura 4, *tutte* le valutazioni compatibili, sembra garantirci ogni informazione di cui potremmo avere bisogno per adeguare una valutazione. L'esempio che considereremo mostrerà, tuttavia, due formule non equivalenti intuizionisticamente ma indistinguibili dalla semantica in esame. Consideriamo $F := \neg A \vee \neg B$ e $G := \neg(A \wedge B)$, con A e B due atomi diversi. Intuizionisticamente non sono equivalenti: infatti, come mostreremo in seguito, da G non è deducibile F, mentre il viceversa è dimostrato dalla seguente deduzione

$$\dfrac{\neg A \vee \neg B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B}{}^{(1)}}{A} \quad \dfrac{}{\neg A}{}^{(3)}}{\bot}}{\neg(A \wedge B)}{}^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B}{}^{(2)}}{B} \quad \dfrac{}{\neg B}{}^{(3)}}{\bot}}{\neg(A \wedge B)}{}^{(2)}}{\neg(A \wedge B)}{}^{(3)}$$

Grazie a (6)-(10) possiamo stabilire quali nodi forzano F e quali forzano G e possiamo fare la stessa verifica anche per $\neg F, \neg G$ e per $\neg\neg F, \neg\neg G$. In tutti e tre i casi non si nota alcuna differenza tra gli insiemi che forzano l'una o l'altra formula.

Per capirne il perché e per risolvere il problema è utile comprendere la spiegazione seguente del motivo per cui non sussiste una deduzione di $\neg A \vee \neg B$ da $\neg(A \wedge B)$. Supponendo di averne una, questa fornisce anche la deduzione $\neg(A \wedge \neg A) \rhd_p \neg A \vee \neg\neg A$ ed essendo la premessa deducibile, in quanto è un'istanza del principio di non contraddizione, sarebbe deducibile anche $\neg A \vee \neg\neg A$ e questa formula non lo è.

Il ragionamento sotteso a questo esempio è lo stesso già incontrato in precedenza: possiamo escludere l'esistenza di alcune deduzioni aggiungendo delle ipotesi di deducibilità relative agli atomi.

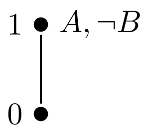


Figura 5

Nel caso in esame è facile ad esempio vedere che se $A \rhd_p \neg B$, allora la deduzione in questione non può sussistere, poiché è deducibile $\neg(A \wedge B)$ ma né $\neg A$, né $\neg B$. Possiamo dunque "adeguare" la valutazione di partenza limitandoci ad usare *solamente* valutazioni compatibili con questa e con le ipotesi aggiuntive che vogliamo considerare. Ad esempio, potremmo ricorrere alle valutazioni classiche che sanciscono $A \vDash_c \neg B$, ovvero che si esprime su A $1-0$ e su B $0-1$, ottenendo l'albero in Figura 5.

Se valessero (6)-(10) si avrebbe che $1 \Vdash \neg A \vee \neg B$ ma $0 \nVdash \neg A \vee \neg B$; d'altro canto $1 \nVdash A \wedge B$ e anche $0 \nVdash A \wedge B$ e quindi entrambi i nodi forzerebbero $\neg(A \wedge B)$.

Considerare soltanto alcune delle valutazioni compatibili con quella di partenza sembra dunque risolvere il problema della sezione precedente.[25] È naturale però chiedersi cosa si può salvare dell'interpretazione degli alberi come sintesi di un processo di adeguamento di una valutazione, se le definizioni (6)-(12) rimangono corrette e, infine, rimane capire la relazione che sussiste tra $\Vdash$ e $\rightarrow$.

Iniziamo osservando che non ha più senso riferirsi solo ad *un singolo albero*, come ad esempio quello in Figura 4, come l'unico strumento che ci permette di arrivare ad una valutazione adeguata. In base a quanto detto precedentemente, infatti, è ragionevole sostenere che *tutti i vari alberi* che nascono dall'aggiungere ipotesi tramite valutazioni compatibili con quella di partenza, servono ad adeguare quest'ultima. Ne segue che, per testare la deducibilità di una formula, bisogna osservare tutti gli alberi che possono essere generati; per concludere la sua non deducibilità basta trovare anche un solo insieme di ipotesi aggiuntive che entrino in contraddizione con l'esistenza della dimostrazione in questione, ovvero, è sufficiente trovare un solo controesempio.

Questo motiva perché nella semantica di Kripke un *modello* è un qualsiasi albero etichettato secondo le regole previste in apertura della Sezione 3.3. Alla radice di un modello (e quindi ad ogni nodo che può essere considerato la

[25] Nel corso della trattazione abbiamo avuto modo di riflettere sulla "simmetria" della semantica che stavamo considerando e sui problemi connessi. Considerare solo alcune valutazioni classiche costituisce una "rottura della simmetria" nel sistema semantico proposto e risulterà la scelta giusta.

radice del sottomodello generato, costituito dai nodi ad esso successivi) possiamo, in analogia con quanto fatto in precedenza, associare una valutazione "giusta". Tale termine, tuttavia, non deve essere confuso con "adeguata" della Definizione 3.2. Infatti, visto l'esempio che apre la sezione, l'unica cosa che ha senso richiedere è che la valutazione sia "giusta" relativamente alle ipotesi aggiuntive fatte ed espresse dalle valutazioni scelte nel creare il modello; l'adeguatezza della Definizione 3.2 ha un connotato assoluto e pertanto non è utilizzabile in questo contesto di parzialità delle valutazioni utilizzate.

Risulta dunque naturale definire la soddisfacibilità in un modello in base alla valutazione "giusta" associata alla radice. In particolare, indicando, come nella Sezione 3.3, con $k \Vdash F$ il fatto che la valutazione "giusta" associata al nodo k valuta F $1-0$, un modello soddisfa F se e solo se la radice forza F o, equivalentemente, se tutti i nodi forzano F.

Sarà ovviamente importante anche interrogarsi sul legame che esiste, in questi nuovi modelli, tra le etichette di un nodo e cosa esso forza a livello atomico. Precedentemente abbiamo discusso di una tale relazione per gli alberi come quelli in Figura 4. Sicuramente, anche in questo nuovo contesto, varrà che se il nodo k è etichettato con A, allora $k \Vdash A$ e analogo per $\neg A$. Poiché le valutazioni che si usano, sebbene non siano tutte, sono comunque compatibili con quella di partenza, se esistono due nodi sopra a k uno che forza A e uno che forza $\neg A$, allora la valutazione associata al nodo k deve esprimersi su A $1/2{-}1/2$. Il problema si presenta, ad esempio, se in ogni nodo successivo a k non si forza $\neg A$. In tal caso ogni valutazione è sicuramente compatibile con il giudizio $A = 1/2 - 1/2$, ma anche con $A = 1/2 - 0$. Qui la scelta naturale ricade però sul considerare la seconda opzione e dunque nell'estendere quanto detto nella sezione precedente nella relazione tra cosa etichetta un nodo e cosa forza a livello atomico.

Occupiamoci ora di capire quali delle proprietà (6)-(12) rimangono sensate sotto questa interpretazione. Le definizioni (6), (7), (8) e (12) sono state date basandosi sulle regole deduttive e sul fatto che l'esistenza di una dimostrazione non è minacciata da un incremento delle informazioni sulla deduciblità di alcuni atomi o loro negazioni. Restano quindi valide anche sotto la modifica che abbiamo compiuto permettendo di "scegliere" quali ipotesi aggiungere.

Per quanto riguarda le proprietà del $\neg$, sebbene il motivo dietro (9) non perda valore, quello che sottosta a (10) è basato sul considerare *tutte* le valutazioni classiche compatibili con quella di partenza e non solo alcune. Si nota tuttavia, già con l'esempio in Figura 5, la bontà della definizione in questione: utilizzando questa, infatti, si riesce a creare un modello che soddisfa $\neg(A \wedge B)$ ma non soddisfa $\neg A \vee \neg B$, ovvero un controesempio alla relazione di conseguenza semantica della seconda dalla prima.

Osserviamo, d'altro canto, che il rischio di utilizzare la definizione (10) piuttosto di un'altra è che un modello soddisfi più formule. Precedentemente, tuttavia, abbiamo giustificato il perché la nozione centrale di una tale semantica deve essere quella di validità e non quella di soddisfacibilità e, quindi, non sembra un problema rilevante. L'implicazione che stiamo mettendo in discussione interviene sulla validità di $\neg F$ solo nel caso in cui nessun nodo, in nessun modello, forza F. In tale circostanza, ogni valutazione classica riconosce falsa F, dunque $\rhd_{pc}\neg F$ e infine $\rhd_p\neg F$. Ciò elimina ogni problema legato all'accettare la definizione (10) e legittima la sua adozione. [26]

Concludiamo trattando il caso dell'$\rightarrow$ e per comodità indichiamo con $(\star)$ la condizione "per ogni $j \geq k$, se $j \Vdash F$, allora $j \Vdash G$". Elenchiamo una serie di motivi che riteniamo validi nel giustificare un'inversione della Proprietà (12) e quindi la definizione di Kripke di $k \Vdash F \rightarrow G$:

- se F coincide con G, $(\star)$ è un'istanza del principio di identità. Il fatto che un modello soddisfi tale principio risiede nell'adozione dello stesso a livello metateorico;

- se G è refutabile, nessun nodo la può forzare e $(\star)$ diventa la condizione "per ogni $j \geq k, j \nVdash F$; essendo deducibile $\neg G$, $F \rightarrow G$ è equivalente a $\neg F$ in base alla Deduzione 9 e alla Deduzione 10 e si recupera dunque la definizione (10);

- una semantica che risulti adeguata per la logica intuizionistica (ma in generale per una qualsiasi logica per cui valga il Teorema di Deduzione), deve soddisfare per formule F e G arbitrarie le seguenti condizioni:

$$\rhd_p F \rightarrow G \text{ se e solo se } \vDash F \rightarrow G;$$
$$F \rhd_p G \text{ se e solo se } F \vDash G.$$

  In particolare deve accadere che $F \rightarrow G$ è valida se e solo se G è conseguenza semantica di F. Discutiamo la possibilità di avere una condizione, che indichiamo con $(\dagger)$, alternativa a $(\star)$ per la definizione di $k \Vdash F \rightarrow G$. In particolare quindi, per (12):

$$k \Vdash F \rightarrow G \text{ se e solo se } (\dagger); \tag{13}$$
$$\text{se } (\dagger), \text{ allora } (\star). \tag{14}$$

  La validità in ogni modello di $F \rightarrow G$ implica $F \vDash G$: sia infatti $\mathcal{K}$ un modello con radice k che soddisfa F. Per l'ipotesi sulla validità fatta,

[26] Osserviamo che un'eventuale scelta relativamente alle regole sulle etichette di cui avevamo parlato nella Nota 23, è coerente con la definizione di $k \Vdash \neg F$, almeno nel caso in cui F sia atomica, visto che le etichette riguardano gli atomi.

soddisfa anche $F \to G$, ovvero $k \Vdash F \to G$ e vale dunque la condizione $(\star)$. In particolare vale che se $k \Vdash F$, allora $k \Vdash G$, da cui $\mathcal{K} \vDash G$.

Affinché l'introduzione della condizione di $(\dagger)$ sia sensata da un punto di vista semantico e $(\dagger)$ non sia equivalente a $(\star)$, deve esistere un modello $\mathcal{K}$ con radice k per cui vale $(\star)$ ma non vale $(\dagger)$. Tale fatto risulta problematico: nel caso in cui $F \vDash G$, poiché $\mathcal{K}$ non gode della proprietà $(\dagger)$, esso non soddisfa $F \to G$ e quindi questa formula non risulta valida.

Un tale problema non sussiste se sostituiamo $(\dagger)$ con $(\star)$. In questo caso infatti la validità di $F \to G$ e la relazione di conseguenza semantica $F \vDash G$ si equivalgono.

Osserviamo che nella trattazione fatta abbiamo solo considerato alberi finiti ed infatti, per il Teorema 2.7 non è limitativo restringersi a questa classe di modelli per la logica proposizionale intuizionistica. Il discorso sopra fornito potrebbe essere visto come una giustificazione euristica di tale teorema. D'ora in poi, se non diversamente specificato, faremo riferimento anche a modelli infiniti.

Siamo ora giunti allo scopo che ci eravamo prefissati, ritrovando proprio la semantica proposta da Kripke, sebbene seguendo un percorso molto diverso da quello adottato dall'autore. In questo processo, uno dei ruoli chiave è stato assunto dal concetto di "valutazione adeguata". Vorremmo, adesso, chiarire i dubbi dietro tale nozione, convalidando maggiormente il ragionamento seguito finora e cogliendo l'occasione anche per riconfermare il legame profondo tra i modelli di Kripke e le valutazioni introdotte all'inizio della trattazione. I risultati che mostriamo, quindi, dovrebbero essere analizzati in questo duplice aspetto.

Definizione 3.5. Sia $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ un modello di Kripke. La *funzione associata* a $\mathcal{K}$ è una funzione $f_{\mathcal{K}}$ che per ogni formula F è tale che:

- $f_{\mathcal{K}}(F) = 1 - 0$ se e solo se $\mathcal{K} \vDash F$;
- $f_{\mathcal{K}}(F) = 0 - 1$ se e solo se $\mathcal{K} \vDash \neg F$;
- $f_{\mathcal{K}}(F) = 1/2 - 0$ se e solo se $\mathcal{K} \vDash \neg\neg F$ e $\mathcal{K} \nvDash F$;
- $f_{\mathcal{K}}(F) = 1/2 - 1/2$ se e solo se $\mathcal{K}$ non soddisfa né F, né $\neg F$, né $\neg\neg F$.

Osserviamo che tali richieste definiscono effettivamente una funzione, visto che accade una ed esattamente una delle condizioni che riguardano la soddisfacibilità delle formule in questione da parte del modello $\mathcal{K}$.

Teorema 3.7. *Sia $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ un modello di Kripke e $f_\mathcal{K}$ la funzione associata. Essa è una valutazione, che nel seguito chiameremo v. Per ogni formula F per cui $\{A_i^v : i \in \mathbb{N}\} \rhd_p F$, si ha che $v(F) = 1 - 0$.*

Dimostrazione. Dimostriamo inizialmente che $f_\mathcal{K}$ è una valutazione. Sia k_0 la radice di $\mathcal{K}$ e F una formula. Nel seguito sarà comodo aver osservato che $f_\mathcal{K}(F) = 1/2 - 1/2$ è equivalente a dire che esistono due nodi k_1 e k_2 distinti dalla radice che forzano rispettivamente F e $\neg F$. La loro esistenza è garantita dal fatto che k_0 non forza né $\neg F$, né $\neg\neg F$; viceversa, la presenza di k_1 vieta che la radice forzi $\neg F$ e la presenza di k_2, invece che la radice forzi F o $\neg\neg F$.

Trattiamo il caso della negazione:

- se $f_\mathcal{K}(F) = 1 - 0$, allora $\mathcal{K} \vDash F$, dunque $\mathcal{K} \vDash \neg\neg F$ e quindi $f_\mathcal{K}(\neg F) = 0 - 1$ e $f_\mathcal{K}(\neg\neg F) = 1 - 0$;
- se $f_\mathcal{K}(F) = 0 - 1$, allora $\mathcal{K} \vDash \neg F$, dunque $f_\mathcal{K}(\neg F) = 1 - 0$ e $f_\mathcal{K}(\neg\neg F) = 0 - 1$, perché soddisfare $\neg\neg\neg F$ equivale a soddisfare $\neg F$ [27] ;
- se $f_\mathcal{K}(F) = 1/2 - 0$, allora $\mathcal{K} \vDash \neg\neg F$, dunque $f_\mathcal{K}(\neg F) = 0 - 1$ e $f_\mathcal{K}(\neg\neg F) = 1 - 0$;
- se $f_\mathcal{K}(F) = 1/2 - 1/2$, allora $\mathcal{K}$ non soddisfa né F, né $\neg F$, né $\neg\neg F$. Abbiamo già osservato che soddisfare $\neg\neg\neg G$ è equivalente a soddisfare $\neg G$ per una qualsiasi formula generica G, quindi $f_\mathcal{K}(\neg F) = f_\mathcal{K}(\neg\neg F) = 1/2 - 1/2$.

Consideriamo ora due formule F e G e analizziamo alcuni dei casi che si possono presentare. Questi esempi saranno sufficienti al lettore per concludere la dimostrazione nei frangenti che rimangono:

- $f_K(F) = 1 - 0$:
  - $f_\mathcal{K}(G) = 1-0$: la radice k_0 forza F e G e dunque $k_0 \Vdash F \wedge G$, da cui $f_\mathcal{K}(F \wedge G) = 1 - 0$; la radice forza F e quindi anche $F \vee G$, da cui $f_\mathcal{K}(F \vee G) = 1-0$; la radice forza G e dunque ogni nodo successivo a k_0 forza G, da cui $k_0 \Vdash F \to G$, cioè $f_\mathcal{K}(F \to G) = 1 - 0$;
  - $f_\mathcal{K}(G) = 1/2 - 0$, dunque per (11), per ogni nodo $k \geq k_0$, esiste $k' \geq k$ tale che $k' \Vdash G$. La radice non forza G e quindi non forza $F \wedge G$. Tuttavia, $k' \Vdash F \wedge G$, dunque $k_0 \Vdash \neg\neg(F \wedge G)$, da cui

[27] Si può dimostrare sia analizzando i vari nodi che non forzano G, oppure attraverso il Corollario 2.6, notando che $\neg\neg\neg F \rhd_p \neg F$ (Deduzione 1, Appendice A) e ovviamente anche $\neg F \rhd_p \neg\neg\neg F$.

$f_{\mathcal{K}}(F \wedge G) = 1/2 - 0$. La radice forza F dunque forza anche $F \vee G$, per cui $f_{\mathcal{K}}(F \vee G) = 1 - 0$. La radice forza F ma non forza G e dunque non può forzare $F \to G$. Tuttavia, $k' \Vdash G$ e quindi $k' \Vdash F \to G$, da cui $k_0 \Vdash \neg\neg(F \to G)$ e $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 1/2 - 0$.

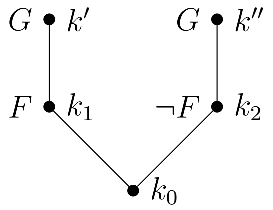
– $f_{\mathcal{K}}(G) = 1/2 - 1/2$, dunque esiste un nodo k_1 che forza G e uno k_2 che forza $\neg G$. $k_1 \Vdash F \wedge G$, mentre nessun nodo sopra k_2 può forzare $F \wedge G$ visto che dovrebbe forzare G, dunque $k_2 \Vdash \neg(F \wedge G)$. Pertanto $f_{\mathcal{K}}(F \wedge G) = 1/2 - 1/2$. Come abbiamo già visto, $f_{\mathcal{K}}(F \vee G) = 1 - 0$, poiché $k_0 \Vdash F$. Per quanto riguarda l'implicazione, osserviamo che $k_1 \Vdash F \to G$, mentre $k_2 \Vdash \neg(F \to G)$ e dunque $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 1/2 - 1/2$.

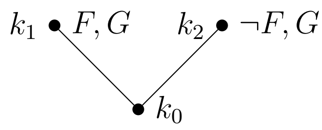
– $f_{\mathcal{K}}(G) = 0 - 1$: nessun nodo può forzare $F \wedge G$ visto che nessun nodo forza G, dunque $k_0 \Vdash \neg(F \wedge G)$ e $f_{\mathcal{K}}(F \wedge G) = 0 - 1$; per discorsi analoghi a quelli sopra visti, $f_{\mathcal{K}}(F \vee G) = 1 - 0$; nessun nodo può forzare $F \to G$ in quanto tutti forzano F ma nessuno forza G e pertanto $k_0 \Vdash \neg(F \to G)$, da cui $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 0 - 1$.

- $f_{\mathcal{K}}(F) = 1/2 - 1/2$. Siano dunque k_1 e k_2 due nodi che forzano rispettivamente F e $\neg F$:

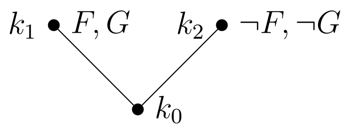
  – $f_{\mathcal{K}}(G) = 1 - 0$: i casi della congiunzione e della disgiunzione sono analoghi al caso in cui $f_{\mathcal{K}}(F) = 1 - 0$ e $f_{\mathcal{K}}(G) = 1/2 - 1/2$; la condizione che implica $k_0 \Vdash F \to G$ è banalmente soddisfatta, dunque $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 1 - 0$;

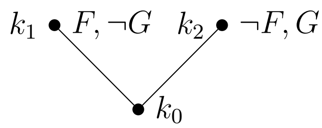
  – $f_{\mathcal{K}}(G) = 1/2 - 0$: ogni nodo ha dunque un successore che forza G e in particolare siano k' e k'' tali nodi relativamente a k_1 e k_2. Allora $k' \Vdash F \wedge G$ e $k_2 \Vdash \neg(F \wedge G)$, dunque $f_{\mathcal{K}}(F \wedge G) = 1/2 - 1/2$. La radice non forza né F, né G, dunque non forza $F \vee G$. Tuttavia siccome ogni nodo ha un successore che forza G, ne ha quindi uno che forza $F \vee G$, per cui $f_{\mathcal{K}}(F \vee G) = 1/2 - 0$. Per l'implicazione, notiamo che ogni nodo ha un successore che forza G e dunque che forza $F \to G$. Pertanto $k_0 \Vdash \neg\neg(F \to G)$. Ne segue che $f_{\mathcal{K}}(F \to G) \in \{1/2 - 0, 1 - 0\}$. In realtà possono accadere entrambi i casi, a seconda di come sono disposti k_1, k_2, k' e k'' come mostrato in figura (F e G in questo grafo e in quelli a seguire vanno considerate atomiche) :



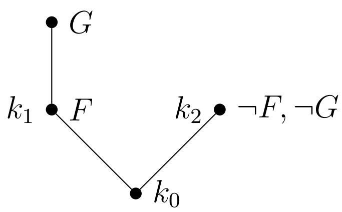


– $f_{\mathcal{K}}(G) = 1/2 - 1/2$. La radice non può forzare $F \wedge G$ e neanche $\neg\neg(F \wedge G)$, visto che $k_2 \Vdash \neg(F \wedge G)$, dato che ogni nodo successivo a k_2 non forza F e dunque neanche $F \wedge G$. Pertanto $f_{\mathcal{K}}(F \wedge G) \in \{1/2-1/2, 0-1\}$ ed entrambe le situazioni possono accadere come mostrato di seguito:





Per la disgiunzione osserviamo che la radice non forza né F, né G e quindi neanche $F \vee G$. Inoltre $k_1 \Vdash F$ e dunque forza anche $F \vee G$, vietando che $k_0 \Vdash \neg(F \vee G)$. Dunque $f_{\mathcal{K}}(F \vee G) \in \{1/2-1/2, 1/2-0\}$ ed entrambi i casi si possono verificare, come mostrato dai grafi precedenti. Per l'implicazione possiamo scartare unicamente il caso $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 0-1$, visto che $k_2 \Vdash \neg F$ e dunque $k_2 \Vdash F \to G$. Tutti gli altri sono possibili: i grafi sopra mostrano che si verificano dei casi in cui $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 1 - 0$ o $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 1/2 - 1/2$, mentre quello seguente costituisce un esempio per $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 1/2 - 0$.



– $f_{\mathcal{K}}(G) = 0 - 1$: nessun nodo può forzare $F \wedge G$ poiché non può forzare G, dunque $f_{\mathcal{K}}(F \wedge G) = 0-1$. Per la disgiunzione notiamo che $k_1 \Vdash F$, dunque $k_1 \Vdash F \vee G$, mentre $k_2 \Vdash \neg(F \vee G)$. Pertanto $f_{\mathcal{K}}(F \vee G) = 1/2 - 1/2$. Per l'implicazione osserviamo che $k_1 \Vdash \neg(F \to G)$, mentre $k_2 \Vdash F \to G$, dunque anche in questo caso $f_{\mathcal{K}}(F \to G) = 1/2 - 1/2$.

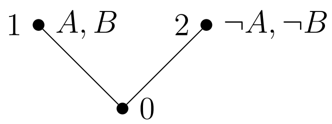
L'ultima parte è una conseguenza immediata del Teorema 2.2. Infatti, denotando $f_{\mathcal{K}}$ con v, se sussiste la deduzione dell'ipotesi, allora $\{A_i^v : i \in$

$\mathbb{N}\} \vDash F$. Per la Definizione 3.5, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}$ è modello di A_i^v, e dunque $\mathcal{K} \vDash F$, ovvero $v(F) = 1 - 0$. $\square$

Corollario 3.8. *L'ipotesi 3.4 è valida.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\rhd_p F$ e fissiamo una scelta di valori atomici. È facile convincersi che esiste un modello $\mathcal{K}$ per cui $f_{\mathcal{K}}$, ristretta agli atomi, coincide con tale scelta. Per quanto dimostrato dal Teorema 3.7, esiste dunque una valutazione ($f_{\mathcal{K}}$) che condivide i giudizi atomici di partenza e che soddisfa F. $\square$

In realtà non si può mostrare che, in generale, $f_{\mathcal{K}}$ è una valutazione adeguata e questo, in base all'euristica che abbiamo presentato, risiede nel fatto che scegliamo di prendere in considerazione soltanto alcune ipotesi deduttive e non tutte e dunque adeguiamo la valutazione di partenza con dei bias. [28] Mostriamo un esempio: nel caso A e B siano due atomi distinti, $A \to B$ non è deducibile senza alcuna assunzione di deducibilità su A o su B, mentre il modello $\mathcal{K}$ in figura valuta tale formula $1 - 0$, sebbene $f_{\mathcal{K}}(A) = f_{\mathcal{K}}(B) = 1/2 - 1/2$. Notiamo che le valutazioni classiche usate sanciscono $A \vDash_c B$ e $B \vDash_c A$, in accordo col discorso precedentemente condotto a pag. 62.



Ora ci rimane da dimostrare l'esistenza di una valutazioni adeguata, scelti arbitrariamente i valori di verità per gli atomi. Risulterà comoda la seguente definizione.

Definizione 3.6. Sia $s : \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \to \{1-0, 1/2-0, 1/2-1/2, 0-1\}$ una scelta di valori di verità per gli atomi del linguaggio. Consideriamo l'insieme $\mathscr{K}$ dei modelli di Kripke $\mathcal{K}$ che soddisfano $\Gamma = \{A_i^s : i \in \mathbb{N}\}$, dove usiamo la notazione della Definizione 3.2. Definiamo la *funzione associata ad* s, come una funzione ϕ che per ogni formula F:

- $\phi(F) = 1 - 0$ se e solo se ogni modello in $\mathscr{K}$ soddisfa F;
- $\phi(F) = 0 - 1$ se e solo se ogni modello in $\mathscr{K}$ soddisfa $\neg F$;

[28]Come avevamo già notato, non essendo presenti tutte le valutazioni compatibili con quella di partenza, fare in modo che valessero (10) e l'analoga legge per l'implica, significava ammettere che dei modelli soddisfacessero più formule rispetto a quelle volute identificando la radice con una valutazione adeguata.

- $\phi(F) = 1/2 - 0$ se e solo se ogni modello in $\mathscr{K}$ soddisfa $\neg\neg F$, ma non tutti soddisfano F;

- $\phi(F) = 1/2 - 1/2$ se e solo se esiste un modello in $\mathscr{K}$ che non soddisfa F, uno che non soddisfa $\neg F$ e uno che non soddisfa $\neg\neg F$.

Anche in questo caso, come nella Definizione 3.5, ϕ è effettivamente una funzione visto che accade una e una sola condizione di quelle presentate riguardo la soddisfacibilità delle formule in questione e i modelli di $\mathscr{K}$. Il dominio è l'insieme delle formule del linguaggio e il codominio l'insieme dei valori di verità $V = \{1 - 0, 1/2 - 0, 1/2 - 1/2, 0 - 1\}$.

Teorema 3.9. *Usando le notazione della Definizione 3.6, si ha che ϕ è una valutazione adeguata che ristretta agli atomi coincide con la scelta di valori di verità di partenza.*

Dimostrazione. La dimostrazione che percorriamo per provare che ϕ è una valutazione si basa su alcune caratteristiche della relazione di conseguenza semantica la cui verifica è abbastanza semplice ed è lasciata al lettore. Trattiamo a mo' di esempio solo due casi che riteniamo significativi [29]:

- $F, G \models F \wedge G$, infatti ogni modello che soddisfa F e G soddisfa anche $F \wedge G$ per la (6);

- $\neg\neg F, \neg\neg G \models \neg\neg(F \wedge G)$. Sia infatti $\mathcal{K}$ un modello che soddisfa $\neg\neg F$ e $\neg\neg G$ e sia k un suo nodo. Allora per (11), poiché $k \Vdash \neg\neg F$, per ogni $k' \geq k$ esiste $k'' \geq k'$ tale che $k'' \Vdash F$; visto che però $k'' \Vdash \neg\neg G$, esiste anche un nodo $k''' \geq k''$ tale che $k''' \Vdash G$. In particolare, $k''' \Vdash F \wedge G$. Abbiamo quindi mostrato che ogni nodo successivo a k ha a sua volta un successore che forza $F \wedge G$. Dunque $k \Vdash \neg\neg(F \wedge G)$, da cui $\mathcal{K} \models \neg\neg(F \wedge G)$.

Nel seguito analizzeremo alcuni casi di interesse. Notiamo subito che l'aver garantito che ϕ è una funzione legittima un ragionamento per esclusione. Ad esempio, se proviamo che $\phi(F)$ non può assumere il valore $1 - 0$, allora assume necessariamente uno tra $1/2 - 1/2, 1/2 - 0$ e $0 - 1$. In particolare potremmo dimostrare che $\phi(F) = 1/2 - 1/2$ senza esibire i vari modelli che non soddisfano $F, \neg F$ e $\neg\neg F$, ma semplicemente provando che $\phi(F)$ non può assumere altri valori.

Consideriamo dapprima il caso della negazione. Sia F una formula:

[29]Le relazioni di conseguenza semantica che verranno utilizzate in seguito possono essere dimostrate anche attraverso la nozione di deducibilità: per il Corollario 2.6 $G_1, \ldots, G_n \rhd_p F$ se e solo se $G_1, \ldots, G_n \models F$.

- se $\phi(F) = 1 - 0$, allora ogni modello in $\mathcal{K}$ soddisfa F e dunque soddisfa $\neg\neg F$. Pertanto, $\phi(\neg F) = 0 - 1$ e $\phi(\neg\neg F) = 1 - 0$;

- se $\phi(F) = 0 - 1$, allora ogni modello soddisfa $\neg F$ e dunque $\phi(\neg F) = 1 - 0$ e $\phi(\neg\neg F) = 0 - 1$;

- se $\phi(F) = 1/2 - 0$, allora ogni modello soddisfa $\neg\neg F$, dunque $\phi(\neg\neg F) = 1 - 0$ e pertanto, $\phi(\neg F) = 0 - 1$;

- se $\phi(F) = 1/2 - 1/2$, allora esistono $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ e $\mathcal{K}_3$ tali che non soddisfano rispettivamente $F, \neg F$ e $\neg\neg F$. Poiché, in generale, soddisfare $\neg\neg\neg G$ equivale a soddisfare $\neg G$, $\phi(\neg F) = \phi(\neg\neg F) = 1/2 - 1/2$.

Analizziamo ora il caso della congiunzione:

- $F, G \vDash F \wedge G$. Se $\phi(F) = \phi(G) = 1 - 0$, allora ogni modello di $\mathscr{K}$ soddisfa tali formule e varrà $\phi(F \wedge G) = 1 - 0$;

- $\neg F \vDash \neg(F \wedge G)$, dunque se $\phi(F) = 0 - 1$, allora $\phi(F \wedge G) = 0 - 1$. Analogamente nel caso $\phi(G) = 0 - 1$;

- $\neg\neg F, \neg\neg G \vDash \neg\neg(F \wedge G)$, dunque se $\phi(F)$ e $\phi(G)$ assumono $1 - 0$ o $1/2 - 0$, anche $\phi(F \wedge G)$ deve essere uno di questi valori. Notiamo, inoltre, che $F \wedge G \vDash F$, quindi se $\phi(F) \neq 1 - 0$, $\phi(F \wedge G) \neq 1 - 0$. Analogamente se $\phi(G) \neq 1 - 0$.

- se $\phi(F) = 1/2 - 0$ e $\phi(G) = 1/2 - 1/2$, allora $\phi(F \wedge G)$ non può essere $1 - 0$ o $1/2 - 0$, visto che $\neg\neg(F \wedge G) \vDash \neg\neg G$. Non potrebbe neanche accadere che $\phi(F \wedge G) = 0 - 1$, visto che $\neg(F \wedge G), \neg\neg F \vDash \neg G$. Dunque in tal caso $\phi(F \wedge G) = 1/2 - 1/2$. Analogamente se $\phi(F) = 1/2 - 1/2$ e $\phi(G) = 1/2 - 0$;

- il ragionamento sopra può essere applicato anche nel caso in cui $\phi(F) = 1 - 0$ e $\phi(G) = 1/2 - 1/2$ (oppure $\phi(F) = 1/2 - 1/2$ e $\phi(G) = 1 - 0$), visto che $F \vDash \neg\neg F$;

- sia $\phi(F) = \phi(G) = 1/2 - 1/2$. Visto che $F \wedge G \vDash F$, $\phi(F \wedge G) \neq 1 - 0$, dato che esiste un modello che non soddisfa F; visto che $\neg\neg(F \wedge G) \vDash \neg\neg F$, $\phi(F \wedge G) \neq 1/2 - 0$, dato che esiste un modello che non soddisfa $\neg\neg F$. Dunque si conclude che $\phi(F \wedge G) \in \{1/2 - 1/2, 0 - 1\}$.

Così si conclude la discussione relativa alla congiunzione. Con discorsi analoghi, che omettiamo, si analizza la disgiunzione.

Vediamo il caso dell'implicazione:

- $G \vDash F \to G$, dunque se $\phi(G) = 1 - 0$, si ha $\phi(F \to G) = 1 - 0$;

- $\neg F \vDash F \to G$, dunque se $\phi(F) = 0 - 1$, si ha $\phi(F \to G) = 1 - 0$;

- $\neg\neg G \vDash \neg\neg(F \to G)$, dunque se $\phi(G) = 1/2 - 0$, allora $\phi(F \to G) \in \{1 - 0, 1/2 - 0\}$. Se $\phi(F) = 1 - 0$, allora consideriamo un modello $\mathcal{K} \in \mathscr{K}$ che non soddisfa G e, in quanto soddisfa F, non potrà soddisfare $F \to G$, dunque $\phi(F \to G) = 1/2 - 0$; negli altri casi ($\phi(F) = 1/2 - 0$ o $\phi(F) = 1/2 - 1/2$) non si possono ottenere risultati migliori di $\phi(F \to G) \in \{1/2 - 0, 1 - 0\}$.

- $\neg\neg F, \neg G \vDash \neg(F \to G)$, quindi se $\phi(F) = 1 - 0$ o $\phi(F) = 1/2 - 0$ e $\phi(G) = 0 - 1$, si ha $\phi(F \to G) = 0 - 1$;

- se $\phi(F) = 1 - 0$ o $\phi(F) = 1/2 - 0$ e $\phi(G) = 1/2 - 1/2$ allora $\phi(F \to G) = 1/2 - 1/2$. Infatti $\neg\neg F, \neg\neg(F \to G) \vDash \neg\neg G$ esclude che $\phi(F \to G)$ assuma $1/2 - 0$ o $1 - 0$; $\neg(F \to G) \vDash \neg G$ vieta che $\phi(F \to G) = 0 - 1$;

- se $\phi(F) = 1/2 - 1/2$ e $\phi(G) = 0 - 1$, allora $\phi(F \to G)$ è diverso sia da $1 - 0$, che da $1/2 - 0$, poiché $\neg\neg(F \to G), \neg G \vDash \neg F$. Consideriamo un modello $\mathcal{K}_1$, con radice k_0, che non soddisfa $\neg\neg F$. Esiste quindi $k \geq k_0$ tale che per ogni $k' \geq k$ $k' \nVdash F$, ovvero $k \Vdash \neg F$. Allora $k \Vdash F \to G$ e dunque $\mathcal{K}_1 \nvDash \neg(F \to G)$ e $\phi(F \to G) \neq 0 - 1$. Si deve concludere che $\phi(F) = 1/2 - 1/2$;

- se $\phi(F) = 1/2 - 1/2$ e $\phi(G) = 1/2 - 1/2$, allora $\phi(F \to G) \in \{1/2 - 1/2, 1/2 - 0, 1 - 0\}$, in quanto il caso in cui ad una tale formula è associato il valore $0 - 1$ è escluso da $\neg(F \to G) \vDash \neg G$.

Proseguiamo mostrando l'asserzione relativa ai valori di verità degli atomi, ovvero provando che s coincide con ϕ se quest'ultima è ristretta all'insieme $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$. Indicheremo, nel caso in cui $i \in \mathbb{N}$ e $s(A_i) = 1/2 - 0$, con $\mathcal{K}_i$ un modello di $\mathscr{K}$ tale che non soddisfa A_i (esso soddisferà comunque $\neg\neg A_i$). Analizziamo la situazione nel dettaglio:

- se $s(A_i) = 1 - 0$, ogni modello di $\mathscr{K}$ soddisfa A_i e dunque $\phi(A_i) = 1 - 0$. Viceversa se $\phi(A_i) = 1 - 0$, ogni modello soddisfa A_i e A_i^s potrebbe essere A_i o $\neg\neg A_i$. Il secondo caso è escluso dall'esistenza di modelli come $\mathcal{K}_i$ e, dunque, $s(A_i) = 1 - 0$;

- $s(A_i) = 0 - 1$ se e solo se ogni modello di $\mathscr{K}$ soddisfa $\neg A_i$ se e solo se $\phi(A_i) = 0 - 1$;

- se $s(A_i) = 1/2 - 0$, allora ogni modello di $\mathscr{K}$ soddisfa $\neg\neg A_i$. Poiché esistono modelli in $\mathscr{K}$ come $\mathcal{K}_i$, si ha $\phi(A_i) = 1/2 - 0$. Viceversa se $\phi(A_i) = 1/2 - 0$, allora ogni modello di $\mathscr{K}$ soddisfa $\neg\neg A_i$, ma $\mathcal{K}_i$ non soddisfa A_i, dunque $A_i^s = \neg\neg A_i$, da cui $s(A_i) = 1/2 - 0$.

- se $s(A_i) = 1/2 - 1/2$ allora A_i^s è soddisfatto da ogni modello e dunque in $\mathscr{K}$ ci saranno modelli che non soddisfano A_i, altri che non soddisfano $\neg A_i$ ed altri ancora che non soddisfano $\neg\neg A_i$. Dunque $\phi(A_i) = 1/2 - 1/2$. Viceversa, se $\phi(A_i) = 1/2 - 1/2$, A_i^s deve necessariamente essere $\top$ e dunque $s(A_i) = 1/2 - 1/2$.

Occupiamoci ora della parte rimanente della dimostrazione, ovvero dimostriamo che ϕ è adeguata. Sia Γ l'insieme della Definizione 3.6. Se $\Gamma \rhd_p F$ per una qualche formula F, per il Teorema 2.2, $\Gamma \vDash F$. Per definizione di $\mathscr{K}$, ogni modello in $\mathscr{K}$ soddisfa ogni formula in Γ e dunque soddisferà anche F, pertanto $\phi(F) = 1 - 0$. Viceversa, supponiamo che $\phi(F) = 1 - 0$ e quindi ogni modello in $\mathscr{K}$ soddisfa F. Se consideriamo un generico modello $\mathcal{K}$ di Γ, questo, sempre per come è definito $\mathscr{K}$, appartiene a $\mathscr{K}$ e dunque $\mathcal{K} \vDash F$. Vista la genericità di $\mathcal{K}$, per il Teorema 2.3, $\Gamma \rhd_p F$. Da questa equivalenza tra $\phi(F) = 1 - 0$ e $\Gamma \rhd_p F$ e dal fatto che ϕ è una valutazione (basterebbe che ϕ soddisfi la Tabella 6), segue che ϕ è adeguata. $\square$

Concludiamo ribadendo che la validità del Teorema 3.7, e quindi dell'Ipotesi 3.4, permette di stabilire un teorema di correttezza per la semantica iniziale, da cui si è partiti, basata sui 4 valori di verità $V = \{1 - 0, 1/2 - 0, 1/2 - 1/2, 0 - 1\}$ e sulle tavole di verità presenti nelle Tabelle 6 e 7. Ci chiediamo ora se valga una qualche forma di completezza per tale semantica.

Supponiamo che F non sia deducibile. Allora, per l'adeguatezza della semantica di Kripke, esiste un modello $\mathcal{K}$ tale che $\mathcal{K} \nvDash F$. A $\mathcal{K}$ è associata una scelta di valori a livello atomico e, dunque, per il Teorema 3.9, si ha una valutazione adeguata ϕ che condivide tali giudizi. Inoltre, usando le notazioni della Definizione 3.6, in $\mathscr{K}$ è presente il modello $\mathcal{K}$ di cui sopra e, pertanto, $\phi(F) \neq 1 - 0$. Ciò mostra dunque il seguente fatto.

Corollario 3.10. *Se F non è deducibile, c'è una scelta di valori a livello atomico ed una valutazione adeguata che condivide tali giudizi che non soddisfa F. Di conseguenza, se tutte le valutazioni adeguate soddisfano F, F è deducibile.*

Questo enunciato può essere utile per mostrare alcuni risultati di deducibilità: infatti, se tutte le valutazioni soddisfano F, allora tale formula è deducibile. Notiamo, tuttavia, che le tautologie, in questo senso forte del termine, non sono molte e, quindi, tale corollario rischia di essere poco applicabile.

Il risultato può essere migliorato ricorrendo al Teorema 3.6, grazie al quale possiamo facilmente escludere alcune valutazioni che non sono adeguate. Quindi, possiamo concludere che se una formula F è soddisfatta da ogni valutazione v che soddisfa $\neg\neg G$, con G deducibile classicamente (e, perciò, si esprime $0-1$ su $\neg G$, con G refutabile classicamente), allora F è deducibile intuizionisticamente.

Questo miglioramento, basato essenzialmente sul Teorema di Glivenko e sull'utilizzo delle valutazioni classiche, permette, ad esempio, di dimostrare la deducibilità intuizionistica delle istanze del principio di non contraddizione a livello atomico (Cfr. Tabella 9).

Una formulazione della completezza, che potrebbe risultare più utile, è la seguente.

Ipotesi 3.11. *Se $\not\vDash_p F$, allora esiste una scelta di valori di verità per gli atomi per cui ogni valutazione v che condivide tali giudizi non soddisfa F.*

Sfortunatamente, una tale ipotesi non è valida e si può fornire come controesempio la legge di pre-linearità $F := (A \to B) \vee (B \to A)$, con A, B formule atomiche. Denotiamo con s la funzione, dagli atomi del linguaggio all'insieme di valori di verità V, che definisce i giudizi atomici. Mostriamo i vari casi, notando che la simmetria della formula in questione ci permette di semplificare la trattazione.

- se $s(A) = 1-0$ $[s(B) = 1-0]$, allora, indipendentemente da $s(B)$ $[s(A)]$, $v(B \to A) = 1-0$ $[v(A \to B) = 1-0]$ e quindi $v(F) = 1-0$, per ogni valutazione v che estende la scelta s;

- se $s(A) = 0-1$ $[s(B) = 0-1]$, allora, indipendentemente da $s(B)$ $[s(A)]$, $v(A \to B) = 1-0$ $[v(B \to A) = 1-0]$ e quindi $v(F) = 1-0$, per ogni valutazione v che estende la scelta s;

- se $s(A) = s(B) = 1/2 - 1/2$, allora esiste una valutazione v per cui $v(A \to B) = 1-0$ e dunque $v(F) = 1-0$;

- se $s(A) = s(B) = 1/2 - 0$, allora esiste una valutazione v per cui $v(A \to B) = 1-0$ e dunque $v(F) = 1-0$;

- se $s(A) = 1/2 - 1/2$ e $s(B) = 1/2 - 0$ $[s(A) = 1/2 - 0$ e $s(B) = 1/2 - 1/2]$, allora esiste una valutazione v per cui $v(A \to B) = 1-0$ $[v(B \to A) = 1-0]$ e dunque $v(F) = 1-0$.

In realtà, il problema non è relativo solo alla semantica di cui sopra abbiamo discusso. Si può mostrare un risultato generale che è valido per ogni semantica del tipo in questione.

Supponiamo di avere, infatti, un generico insieme finito V di valori di verità, di avere un elemento $\mathbf{v} \in V$ (che denoterà il vero) e di avere una funzione che a $\mathbf{g_i}$ e $\mathbf{g_j}$, due elementi in V, e ad un operatore proposizionale $\circ$, associano un sottoinsieme di V, che denotiamo con $V_{\mathbf{g_i}}^{\mathbf{g_j}}(\circ)$. Definiamo una valutazione come una funzione dall'insieme delle formule a V, tale che $v(\top) = \mathbf{v}$ e per ogni formula F, G e per ogni operatore proposizionale $\circ$, $v(F \circ G) \in V_{v(F)}^{v(G)}(\circ)$. Chiamiamo $\mathcal{S}$ la semantica delle valutazioni basata sulle definizioni sopra: una valutazione soddisfa F se $v(F) = \mathbf{v}$. Vale, allora, il seguente teorema.

Teorema 3.12. *Per la semantica $\mathcal{S}$ non possono valere contemporaneamente le Ipotesi 3.4 e 3.11.*

Dimostrazione. Preliminarmente osserviamo che:

a) $\mathbf{v} \in V_{\mathbf{g}}^{\mathbf{g}}(\rightarrow)$, dove $\mathbf{g}$ è un generico elemento di V. Infatti, poiché per ogni formula F è deducibile $F \rightarrow F$, per l' Ipotesi 3.4, esiste, indipendentemente dalla scelta dei valori a livello atomici, una valutazione v che si esprime $\mathbf{v}$ sulla formula in questione. In particolare considerando il caso in cui F è atomica e il valore assegnatole è $\mathbf{g}$, dal ragionamento sopra segue la tesi;

b) $\mathbf{v} \in V_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(\wedge)$. La tesi segue semplicemente dal notare che $\top \wedge \top$ è deducibile e dalla validità dell'Ipotesi 3.4.

c) $\mathbf{v} \in V_{\mathbf{v}}^{\mathbf{g}}(\vee)$ $[\mathbf{v} \in V_{\mathbf{g}}^{\mathbf{v}}(\vee)]$ dove $\mathbf{g}$ è un qualsiasi elemento di V. Infatti, poiché per ogni formula F è deducibile $\top \vee F$ $[F \vee \top]$, per l' Ipotesi 3.4, esiste, indipendentemente dalla scelta dei valori a livello atomici, una valutazione v che si esprime $\mathbf{v}$ sulla formula in questione. In particolare, considerando il caso in cui F è atomica e il valore assegnatole è $\mathbf{g}$, dal ragionamento sopra segue la tesi.

Sia ora $|V| = n$ e consideriamo la formula F_{n+1} della dimostrazione del Teorema 3.2. Fissata una scelta di valori di verità a livello atomico s, esiste una valutazione v che la estende per cui $v(F_{n+1}) = \mathbf{v}$. Infatti, per il principio dei cassetti, almeno due degli atomi che compaiono in F_{n+1} assumono lo stesso valore: supponiamo che questi siano A_i e A_j, con $i < j$. Per a), esiste una valutazione v' che estende s tale che $v'(A_i \rightarrow A_j) = v'(A_j \rightarrow A_i) = \mathbf{v}$, per b), una v'' che estende s per cui $v''(A_i \equiv A_j) = \mathbf{v}$ e, infine, per c), una v che estende s tale che $v(F_{n+1}) = \mathbf{v}$.

Poiché $\nvdash_p F_{n+1}$, dalla validità dell'Ipotesi 3.11 segue la contraddizione e dunque la tesi. $\square$

A Deduzioni utilizzate

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F}\,(2) \qquad \dfrac{}{\neg F}\,(1)}{\bot}}{\neg\neg F}\,(1) \qquad \neg\neg\neg F}{\dfrac{\bot}{\neg F}\,(2)}$$

Deduzione 1

$$\dfrac{\dfrac{F \qquad \dfrac{}{G}\,(1)}{F \wedge G} \qquad \neg(F \wedge G)}{\dfrac{\bot}{\neg G}\,(1)}$$

Deduzione 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F}\,(1) \qquad \dfrac{}{G}\,(2)}{F \wedge G} \qquad \neg(F \wedge G)}{\bot}}{\neg F}\,(1) \qquad \neg\neg F} {\dfrac{\bot}{\neg G}\,(2)}$$

Deduzione 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \wedge G}\,(1)}{G} \qquad \neg G}{\dfrac{\bot}{\neg(F \wedge G)}\,(1)}$$

Deduzione 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F}\,(1)}{F \vee G} \qquad \neg(F \vee G)}{\dfrac{\bot}{\neg F}\,(1)}$$

Deduzione 5

$$\dfrac{F \vee G \qquad \dfrac{}{F}\,(1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{G}\,(1) \qquad \neg G}{\bot}}{F}}{F}\,(1)$$

Deduzione 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{F}^{\,(1)}}{F \lor G} \qquad \neg(F \lor G)}{\bot}}{\neg F}\,(1) \qquad \neg\neg F}{\bot}$$

Deduzione 7

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{G}^{\,(1)}}{F \to G} \qquad \neg(F \to G)}{\bot}}{\neg G}\,(1)$$

Deduzione 8

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{F}^{\,(1)} \qquad F \to G}{G} \qquad \neg G}{\bot}}{\neg F}\,(1)$$

Deduzione 9

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{F}^{\,(1)} \qquad \neg F}{\bot}}{G}}{F \to G}\,(1)$$

Deduzione 10

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{F}^{\,(1)} \qquad \overline{F \to G}^{\,(2)}}{G} \qquad \overline{\neg G}^{\,(3)}}{\bot}}{\neg F}\,(1) \qquad \neg\neg F}{\bot}}{\neg(F \to G)}\,(2) \qquad \neg\neg(F \to G)}{\bot}}{\neg\neg G}\,(3)$$

Deduzione 11

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F}\,(1) \qquad \dfrac{}{G}\,(2)}{F \wedge G} \qquad \dfrac{}{\neg(F \wedge G)}\,(3)}{\bot}}{\neg F}\,(1) \qquad \neg\neg F}{\bot}}{\neg G}\,(2) \qquad \neg\neg G}{\bot}}{\neg\neg(F \wedge G)}\,(3)$$

Deduzione 12

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F}\,(1)}{F \vee G} \qquad \dfrac{}{\neg(F \vee G)}\,(2)}{\bot}}{\neg F}\,(1) \qquad \neg\neg F}{\bot}}{\neg\neg(F \vee G)}\,(2)$$

Deduzione 13

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{G}\,(1)}{F \to G} \qquad \dfrac{}{\neg(F \to G)}\,(2)}{\bot}}{\neg G}\,(1) \qquad \neg\neg G}{\bot}}{\neg\neg(F \to G)}\,(2)$$

Deduzione 14

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \wedge G}\,(1)}{F} \qquad \dfrac{}{\neg F}\,(2)}{\bot}}{\neg(F \wedge G)}\,(1) \qquad \neg\neg(F \wedge G)}{\bot}}{\neg\neg F}\,(2)$$

Deduzione 15

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \qquad \dfrac{}{F \to G}\,(1)}{G} \qquad \neg G}{\bot}}{\neg(F \to G)}\,(1)$$

Deduzione 16

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \lor G}\,{\scriptstyle (2)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{F}\,{\scriptstyle (1)} \qquad \neg F}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{}{G}\,{\scriptstyle (1)} \qquad \neg G}{\bot}}{\bot}\,{\scriptstyle (1)}}{\neg(F \lor G)}\,{\scriptstyle (2)}
$$

Deduzione 17

Riferimenti bibliografici

[Att04] M. V. Atten, *On Brouwer*, Wadsworth Philosophers Series, Katholieke Universiteit Leuven, 2004.

[Bro08] L.E.J. Brouwer, *De onbetrouwbaarheid der logische principes*, 1908.

[Bro13] L.E.J. Brouwer, *Intuitionism and Formalism*, Reprinted in Benacerraf and Putnam (1983), 1913.

[Bro48] L.E.J. Brouwer, *Consciousness, philosophy, and mathematics*, 1948.

[Dal79] D. Van Dalen, *Intuitionistic Logic.* Handbook of Philosophical Logic, Vol. 5 n.1, 1979.

[Dum73] M. Dummett, *Truth and Other Enigmas, The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic*, Harvard University Press, 1973.

[Gen35] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, Mathematische Zeitschrift, vol. 39, 1935.

[Göd32] K. Gödel, *Zum Intuitionistichen Aussagenkalküls*, Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, 1932.

[Göd33] K. Gödel, *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, 1933, riprodotto e tradotto con nota introduttiva di A. S. Troelstra in Gödel 1986: 296-304.

[Jas36] S. Jaśkowski, *Recherches sur le système de la logique intuitioniste*, Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique 6, 1936.

[Kri63] Saul A. Kripke, *Semantical Analysis of Modal Logic I.* Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1963.

[Kri65] Saul A. Kripke, *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I.* Harvard University, Cambridge, 1965.

[Par12] F. Parlamento, *Truth-Value Semantics and Functional Extensions for Classical Logic of Partial Terms Based on Equality*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 2012.

[Par20.a] F. Parlamento, *Appunti del corso di Logica Matematica*, a.a. 2020-2021.

[Par20.b] F. Parlamento, *Le semantiche S_n di Gödel*, dagli *Appunti del corso di Fondamenti della Matemtica*, a.a. 2020-2021.

[Qui81] W.V.Quine, *What price bivalence?* The Journal of Philosophy, vol. 78, n.2, pagg. 90-95, Febbraio 1981.

[Tro-Dal88] A.S. Troelstra, D. Van Dalen, *Constructivism in Mathematics: an Introduction*. Elsevier Science Publishers B.V., 1988.

[Wit21] L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Giulio Einaudi editore, traduzione di Bertrand Russell, 1921.